

## II. Halmazelmélet



### Halmazok megadása

**145.** Amikor a halmzt körülírással vagy valamilyen tulajdonságával adjuk meg, bármilyen elemről egyértelműen el kell tudnunk dönteni, hogy beletartozik a halmazba vagy sem. Ezért nem határoznak meg halmzt az  $a)$ ,  $b)$ ,  $l)$  körülírások.

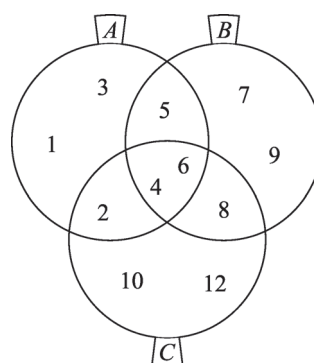
Pl. a  $b)$  esetben egy szőkésbarna hajú lányról nem dönthető el egyértelműen, hogy a halmazba tartozik vagy sem.

A  $d)$  esetben pl. a bejelentett lakcím alapján dönthetünk, a  $k)$  pedig üres halmaz, hiszen nincs legnagyobb prímszám.

A  $c)$  és  $d)$  csak adott időpontban határoz meg egyértelműen egy halmzt, hiszen mind az osztály összetétele, mind Budapest lakossága folyamatosan változhat. Az  $e)$  és  $j)$  körülírást is pontosítani kell, hiszen különböző időszakokban más-más elemek tartoztak a halmazba. Pl.  $e)$ : Budapest hídjai napjainkban;  $j)$ : olimpiai versenyszámok Sydneyben, 2004-ben.

A többi esetben a körülírások, illetve diagramok halmzt határoznak meg. Pl.: az  $f)$  halmaz: {a gízai piramisok; Babilon falai; Szemirámisz függőkertje; az olümpiai Zeusz-szobor; az epheszoszi Artemiszion; a halikarnasszoszi Mauszóleon; a rhodoszi kolosszus}; vagy a  $g)$  halmaz „elemei”: *Lénárd Fülöp* (1862–1947), *Bárány Róbert* (1876–1936), *Zsigmondy Richard Adolf* (1865–1929), *Szent-Györgyi Albert* (1893–1986), *Hevesy György* (1885–1966), *Békésy György* (1899–1972), *Wigner Jenő* (1902–1995), *Gábor Dénes* (1900–1979), *Polányi János* (sz. 1929), *Wiesel Elie* (sz. 1928), *Harsányi János* (1920–2000), *Oláh György* (sz. 1927), *Kertész Imre* (sz. 1929), *Avram Hershko* (sz. 1937).

146.



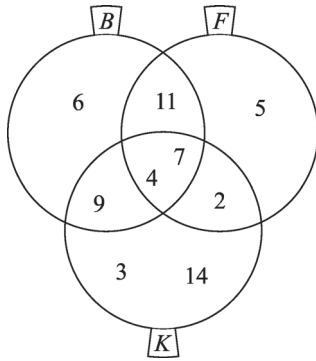
**146. a)** Pl.:  $A = \{x \in \mathbf{N}^+ \mid x \leq 6\}$ ,  $B = \{b \in \mathbf{N} \mid 4 \leq b \leq 9\}$ ,  $C = \{2k \mid 1 \leq k \leq 6 \text{ és } k \in \mathbf{Z}\}$ .

**b)** Pl.: 146. ábra.

**147.**  $A = \{2, 3, 5, 7\}$ ;  $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ . A  $C$  halmaz elemeit adott időpontban, a konkrét osztály esetén sorolhatjuk fel.

**148.** Egy halmazban egy elemet csak egyszer sorolunk fel. Ezért a diákok lehetséges testmagasságainak halmaza cm-ben  $\{158, 159, 161, 162, 165, 170, 171, 173, 174, 176, 177, 181\}$ , ez 12 elemű halmaz. A diákok halmaza 16 elemű.

149.



**149.** Hivatkozunk a tanulókra a sorszámmukkal! Ekkor  $B = \{4, 6, 7, 9, 11\}$ ,  $F = \{2, 4, 5, 7, 11\}$ ,  $K = \{2, 3, 4, 7, 9, 14\}$ , s a Venn-diagram: (149. ábra).

**150.** a)  $A = \{\text{Belgium, Franciaország, Hollandia, Luxemburg, Németország, Olaszország, Nagy-Britannia, Dánia, Írország, Görögország, Spanyolország, Portugália, Ausztria, Finnország, Svédország, Ciprus, Csehország, Észtország, Lengyelország, Lettország, Litvánia, Magyarország, Málta, Szlovákia, Szlovénia}\}$ ;

b)  $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$ ;

c) a végződések utolsó számjegye periodikusan ismétlődik,  $C = \{1, 2, 4, 8, 6\}$ ;

d)  $D = \{0, 3, -3\}$ ;

e)  $E = \emptyset$ ;

f)  $F = \{11, 14, 17, 20\}$ ;

g)  $G = \emptyset$ .

**151.** Az a), d), e), f), g), h), l) esetben racionálisak a számok.

A b) és c) esetben a  $\sqrt{n}$  kifejezés ( $n \in \mathbf{N}$ ) akkor, és csak akkor racionális, ha  $n$  négyzetszám; az i) esetben pedig a tizedes tört végtelen, nem szakaszos.

**152.**  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Igaz állítások: a); d); g).

$1 \in A$  és  $A \in B$ , de ebből nem következik, hogy  $1 \in B$ ; általában ha  $x \in A$  és  $A \in B$ , akkor ebből még nem következik, hogy  $x \in B$ .

**153.** Az alábbi táblázatban  $i$ -vel jelöltük a megfelelő halmazokra vonatkozó igaz állításokat.

	$\mathbf{Z}^+$	$\mathbf{Z}^-$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}^*$	$P$
a)	$i$	$i$	$i$		
b)	$i$	$i$	$i$	$i$	$i$
c)	$i$		$i$		
d)	$i$		$i$	$i$	
e)			$i$		
f)	$i$	$i$	$i$	$i$	$i$

Néhány érdekesebb eset a 30-ból:

Az a) és c) esetek a halmazok zártóságára kérdeznék rá;  $\mathbf{Q}^*$  nem zárt sem az összeadás, sem a szorzás műveletére nézve. Vagyis két irracionális szám összege és szorzata is lehet racionális. Pl.  $\pi$  és  $(1 - \pi)$  irracionális számok, összegük racionális;  $\sqrt{2}$  és  $\sqrt{8}$  irracionális számok, szorzatuk racionális. A d) esetben nem

tudunk olyan prímszámokat mondani, melyek szorzata is prímszám lenne; ez a definícióból következik. Az *e*) esetben a kivonás művelete általában kivethet a halmazból:  $(-2)$  és  $(-5)$  negatív egész számok,  $(-2) - (-5)$  már nem az; vagy pl.  $(1 + \sqrt{2})$  és  $\sqrt{2}$  irracionális számok, de különbségük racionális. Az *f*) esetben ha  $(p + 2)$  és  $p$  ikerprímek, különbségük 2, ami prím; vagy  $(p + 2) - 2 = p$  is két prímszám különbsége ekkor.

**154.**  $A = \{-2, 2\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{0, 2\}$ ,  $D = \{2\}$ ,  $E = \{0\}$ ,  $F = \{2\}$ ,  $G = \{2\}$ . Egyenlő halmazok:  $B = D = F = G$ .

A *h*) esetben az  $(x - 1)^2 = 0$  egyenletnek egyetlen kétszeres gyökével számoltunk:  $x = 1$ . A matematikai szóhasználat (ebben és a hasonló esetekben) nem következetes: az  $(x - 1)(x - 1) = 0$  egyenletet úgy is tekinthetjük, mintha két gyöke lenne, s ezek egyenlők:  $x_1 = x_2 = 1$ . Ekkor  $H = \{2\}$ , s  $B = D = F = G = H$ .

**155.** Üres halmazok:  $A, B, C, E, F, I$  (jelenlegi tudásunk szerint),  $J, K$ . Az üres halmazok egyenlők (csak egyetlen üres halmaz van). A  $G$  és  $H$  halmazoknak egy-egy elemük van, de nem egyenlők egymással.

**156.** a) 32; b) 12; c) 5; d) 3; e) 0; f) 0; g)  $\infty$ ; h)  $\infty$ ; i)  $\infty$ ; j) 1; k) 8; l) 24.

*Megjegyzések:*

c) az utolsó számjegy periodikusan ismétlődik (ez igaz tetszőleges egész szám hatványainak utolsó számjegyére is);

g) már Euklidész i. e. 300 körül bebizonyította, hogy végtelen sok prím-szám van (Euklidész: Elemek, IX. 20. tétel);

l) a negatív osztókkal is számolni kell.

**157.** a)  $2(\sqrt{2}$  és  $-\sqrt{2})$ ; b) 0; c) 1.

**158.** a) 0; b) 0; c) 1; d) 1; e) 1; f) 1; g) 2; h) 3.

Nem ugyanazt jelenti pl.  $\{\}$  és  $\{\emptyset\}$ ; az előbbi az üres halmaz, az utóbbi pedig az a halmaz, amelynek egy eleme van, s ez az üres halmaz.

Az *f*) feladatban az üres halmazt kétszer soroltuk fel elemként, de ez csak egy elemnek számít.

**159.**  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , így  $|A| = 7$ ,  $|B| = 6$ ,  $|C| = 6$ . Az igaz állítások: a); d).

**160.** a)  $\{\}$  vagy  $\emptyset$ ;

b)  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{d\}$ ;

c)  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{a, d\}$ ,  $\{b, c\}$ ,  $\{b, d\}$ ,  $\{c, d\}$ ;

d)  $\{a, b, c\}$ ,  $\{a, b, d\}$ ,  $\{a, c, d\}$ ,  $\{b, c, d\}$ ;

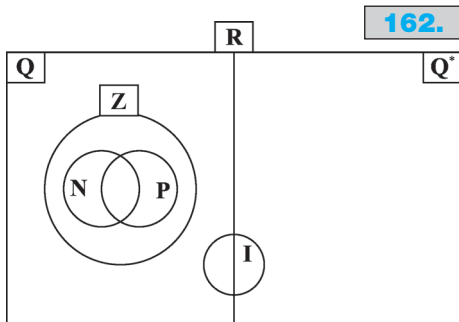
e)  $\{a, b, c, d\}$ ;

f)  $A$ -nak 5 (vagy több) elemű részhalmaza nincs.

Észrevehetjük, hogy pl. az 1 elemű és a 3 elemű részhalmazok kiegészítik egymást, párba állíthatók, így ugyanannyian vannak.

**161.** Az elemszámok:  $|A| = 8$ ,  $|B| = 10$ ,  $|C| = 4$ ,  $|D| = 4$ ,  $|F| = 20$ .  $E$  nem része  $H$ -nak,  $F$  pedig nem valódi részhalmaza.

II



162.

**162.** A racionális és irracionális számok halmazának nincs közös eleme, egyesítésük a valós számokat adja.  $I \subseteq R$ ,  $Q^* \subseteq R$ ,  $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ ,  $P \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ ; így pl.  $N \subseteq Q$  stb. is teljesül.

**163.** Az egyes halmazokat téglalappal szemléltetve a 163. ábra Venn-diagramját kapjuk.

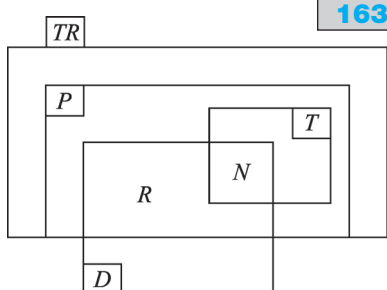
Részhalmazok: Pl.  $N \subseteq R \subseteq P \subseteq TR$  vagy  $N \subseteq T \subseteq P \subseteq TR$ .

**164.** Igaz állítások: a); c); i); k); l); m); o); q); s); u).  
Megjegyzések:

d)  $1 \in A$  és  $A \in B$ , de ebből nem következik, hogy  $1 \in B$ ; általában ha  $x \in A$  és  $A \in B$ , akkor ebből még nem következik, hogy  $x \in B$ .

k), o): Minden halmaz része önmagának.

u) Az üres halmaz minden halmaznak részhalma.



163.

**165.** a) Igaz.

b) Nem eldönthető, pl.  $A = \{1, \{a\}\}$  esetén  $a \notin A$ , míg  $A = \{a, \{a\}\}$  esetén  $a \in A$ .

c)  $A = B$ .

**166.** Igaz állítások: a); b). A c) állítás hamis, ellenpélda pl.  $A = B$ ; míg a d) állítás csak véges halmazokra igaz.

**167.** a) 3-féle alak, 3-féle szín, 2-féle méret és 2-féle kitöltés lehetséges. A kombinatorika szorzási szabálya miatt  $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$  darabból áll a készlet.

$$|F| = 12, |K| = 12, |T| = 18;$$

a szorzási szabály alapján

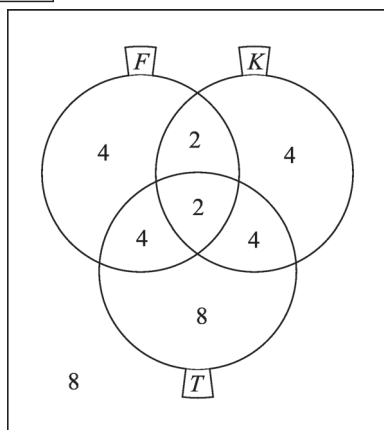
$$|F \cap K| = 4, |F \cap T| = 6,$$

$$|K \cap T| = 6, |F \cap K \cap T| = 2.$$

Szemléltessük az  $F, K, T$  halmazokat, majd írjuk be a megfelelő helyre az egyes tartományok elemszámát! Az  $F \cap K \cap T$  tartomány elemszámának meghatározásával kezdetjük s „belülről kifelé” haladhatunk. A belső tartományok elemszámainak összegzése után a külső  $\overline{F \cup K \cup T}$  tartomány elemszámára 8 adódik. (Ezt egyébként számolhatjuk az  $\overline{F \cap K \cap T}$  képlettel is.)

Az elemszámok: b) 12; c) 4; d) 20; e) 8; f) 12; g) 28; h) 10.

167.



**168.** a)  $|A| = 5$ ; b)  $D \subseteq C$ ;  $D \subseteq A$ ; c)  $|\overline{A}| = 5$ ; d) a legnagyobb elemszám:  $|C| = 6$ .

**169.**  $A = B$  akkor és csak akkor, ha  $A \subseteq B$  és  $B \subseteq A$ . Tehát az  $A$  és  $B$  halmazok egyenlőségekor két állítást kell bizonyítanunk:

1. Minden  $a \in A$  esetén  $a \in B$  is teljesül (vagyis  $A \subseteq B$ ).

2. Minden  $b \in B$  esetén  $b \in A$  is teljesül (vagyis  $B \subseteq A$ ).

Thalész tétele és a tétel megfordítása a következő: a síkon azon pontok halmaza, amelyekből egy adott  $CD$  szakasz derékszög alatt látszik, a  $CD$  átmérőjű kör, kivéve a  $CD$  szakasz két végpontja.

Ez alapján két állítást kell igazolnunk:

i) a  $CD$  átmérőjű kör  $C$ -n és  $D$ -n kívüli tetszőleges  $P$  pontjára  $\sphericalangle CPD = 90^\circ$  (Thalész tétele);

ii) ha egy  $Q$  pontra  $\sphericalangle CQD = 90^\circ$ , akkor  $Q$  rajta van a  $CD$  átmérőjű körön.

Halmazokkal megfogalmazva: ha

az  $A$  halmaz: a  $CD$  átmérőjű kör  $C$ -n és  $D$ -n kívüli pontjainak halmaza;

a  $B$  halmaz: azon  $Q$  pontok halmaza (a síkon), amelyekre  $\sphericalangle CQD = 90^\circ$ ;

akkor az  $A = B$  egyenlőséget két lépésben igazolhatjuk.

Megmutatjuk, hogy

I. [1.-nek és i)-nek megfelelően]: ha  $P \in A$ , akkor  $P \in B$  is teljesül; valamint

II. [2.-nek és ii)-nek megfelelően]: ha  $Q \in B$ , akkor  $Q \in A$  is igaz.

**170.**

$k$	0	1	2	3	4	5
$k$ elemű részhalmazok száma	1	5	10	10	5	1
$5 - k$ elemű részhalmazok száma	1	5	10	10	5	1

A táblázat alapján észrevehetjük, hogy egy 5 elemű halmaznak ugyanannyi  $k$  elemű, mint  $5 - k$  elemű részhalmaza van; vagy a 0 és 5, az 1 és 4 stb. elemű részhalmazok száma megegyezik.

A páros elemszámú és a páratlan elemszámú részhalmazok száma egyenlő (16).

Az összes részhalmaz száma  $32 (= 2^5)$ .

Mind az öt állítás általánosítható tetszőleges  $n$  elemszámú  $A$  halmazra ( $n \in \mathbf{Z}^+$ ).

## Műveletek halmazokkal

**171.** Az igaz állítások: a); d); h); k).

(A b), c), f) esetekben a halmazműveletek eredménye nem halmaz.)

**172.**  $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ , így:

a)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ;

b)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ;

c)  $\{4, 5, 6\}$ ;

d)  $\{4, 5, 6\}$ ;

e)  $\{1, 2, 3\}$ ;

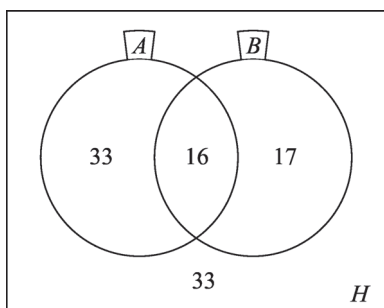
f)  $\{7, 8\}$ .

**173.** a)  $\mathbf{Q}^*$ ; b)  $\mathbf{R}_0^-$  (a negatív valós számok és a 0); c) azon valós számok, melyek nem egészek; d)  $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq -2 \text{ vagy } 3 < x\}$ ; e)  $\mathbf{Q}$ ; f)  $\emptyset$ ; g)  $\mathbf{R}$ .



- 174.** a)  $\mathbf{Z}^-$ ;  
 b) pozitív páros számok halmaza;  
 c) a 6-nál nem kisebb természetes számokat és a 0-t tartalmazó halmaz;  
 d)  $\{6k + 3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ .  
 e) A műveletet nem értelmezzük (általában  $\overline{A}$  a  $H$  alaphalmazon csak  $A \subseteq H$  esetén értelmezett).  
*Megjegyzés:*  
 A feladat másképpen is értelmezhető: *először* tekintsük a  $\{6k \mid k \in \mathbf{Z}\}$  alaphalmazt, majd *ezután* ebből azokat az elemeket, amelyek nem  $3k$  alakúak. Ekkor a  $6k \pm 1$  és  $6k \pm 2$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) alakú számok halmaza a megoldás.  
 f)  $\{6\text{-nál nem kisebb természetes számok}\}$ ;  
 g) a negatív egész számokat, a 6-nál nem kisebb természetes számokat és a 0-t tartalmazó halmaz;  
 h)  $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ ;  
 i)  $\overline{\overline{A}} = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  
 j)  $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ .
- 175.** Az alaphalmaz elemszáma 99.  
 a) 49; b) 80; c) 66; d) 9; e) 89; f) 5; g) 91; h) 25; i) nem értelmezzük.
- 176.** a)  $\overline{B}$  = azon tanulók halmaza ebből a csoportból, akiket nem hívtak be biológiából a szóbeli fordulóra. (Vagy: a biológiából legfeljebb 18 pontot elért tanulók halmaza.) Hasonlóan értelmezhetjük az  $\overline{F}$  és  $\overline{K}$  halmazokat is.  
 b)  $|B| = 12$ ,  $|\overline{B}| = 15 - |B| = 3$ ; hasonlóan  $|F| = 12$ ,  $|\overline{F}| = 3$ ,  $|K| = 5$ ,  $|\overline{K}| = 10$ .
- 177.** a) és b): legfeljebb kétjegyű, 2-vel vagy 3-mal osztható pozitív egész számok;  
 c) és d): legfeljebb kétjegyű, 2-vel és 3-mal osztható pozitív egész számok (vagyis a 6-tal osztható számok);  
 e) azok a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok, amelyek párosak, de 3-mal nem oszthatók (vagyis a  $6k + 2$  és  $6k + 4$  alakú számok);  
 f) azok a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok, amelyek 3-mal oszthatók, de 2-vel nem (vagyis a  $6k + 3$  alakú számok);

**177.**



- g) azok a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok, amelyek a 2 és 3 közül legfeljebb az egyik számmal oszthatók (vagyis nem oszthatók 6-tal);  
 h) azok a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok, amelyek sem 2-vel, sem 3-mal nem oszthatók.  
 $|H| = 99$ ,  $|A| = 49$ ,  $|B| = 33$ ,  $|A \cap B| = 16$ . Szemléltessük a halmazokat!  
 A 177. ábrán az egyes tartományokba a részhalmazok elemszámát írtuk, a kitöltést az  $A \cap B$  tartománnyal kezdtük.  
 Ez alapján az elemszámok: a) és b): 66; c) és d): 16; e) 33; f) 17; g) 83; h) 33.

**178.** Igaz állítások: *b*); *c*); *d*); *e*).

A *c*) állításban az  $A \subseteq H$  kitétel felesleges, hiszen  $\overline{A}$ -t csak  $A \subseteq H$  esetén értelmezzük.

**179.** *a*) Azon diákok halmaza, akik az első vagy második fordulóban legalább 35 pontot értek el.

*b*) Azon diákok halmaza, akik a második és a harmadik fordulóban is legalább 35 pontot értek el.

*c*) Azon diákok halmaza, akik az első fordulóban elérték 35 pontot, de a harmadikban nem.

*d*) Azon diákok halmaza, akik a második fordulóban elérték 35 pontot, de a harmadikban nem.

A tanulókra sorszámukkal hivatkozhatunk. Ekkor  $A = \{4, 5, 7, 8, 12, 13\}$ ,  $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13\}$ ,  $C = \{3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15\}$ , s ez alapján az elemszámok: *e*) 12; *f*) 6; *g*) 3; *h*) 2.

**180.** *a*) és *b*): (1), (2), (3); *c*) és *d*): (2); *e*) (1); *f*) (3).

**181.** Mivel  $B = \{8, 10, 12, 14, 16, 18\}$  és  $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ , ezért:

*a*) és *b*):  $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$ ; *c*) és *d*):  $\{12\}$ ; *e*)  $\{2, 4\}$ ;  
*f*)  $\{2, 4, 6, 12\}$ .

**182.** *a*) és *b*): (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7); *c*) és *d*): (4);

*e*)  $(A \setminus B)$ : (1)-es és (5)-ös tartományok;  $C$ : (4), (5), (6), (7) tartományok; így  $(A \setminus B) \setminus C$ : (1); *f*)  $A$ : (1), (2), (4), (5);  $B \setminus C$ : (2), (3); így  $A \setminus (B \setminus C)$ : (1), (4), (5).

**183.** A három művelet végrehajtásának sorrendje tetszőleges. Eredményül minden esetben az  $A, B, C$  és  $D$  halmazok egyesítését kapjuk. (Vagyis azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak.)

**184.** A három művelet végrehajtásának sorrendje tetszőleges. Eredményül minden esetben az  $A, B, C$  és  $D$  halmazok közös metszetét kapjuk. (Vagyis azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek mind a négy halmazban benne vannak.)

**185.** *a*) 185. ábra.

*b*)  $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3, 10\}$ ,

$A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ ;

*c*)  $(A \cap B) \setminus C = \{2\}$ ,  $A \cap (B \setminus C) = \{2\}$ .

**186.** *a*)  $A \cup B$ : (1), (2), (3), (4), (5), (6)-os tartományok;  $C$ : (4), (5), (6), (7); így  $(A \cup B) \cap C$ : (4), (5), (6);

*b*) (1), (2), (4), (5), (6);

*c*) (2), (4), (5), (6), (7);

*d*) (2), (4), (5);

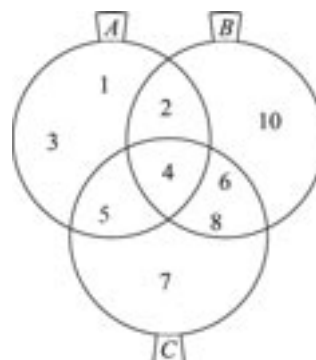
*e*)  $A \cup B$ : (1), (2), (3), (4), (5), (6)-os tartományok;  $C$ : (4), (5), (6), (7); így  $(A \cup B) \setminus C$ : (1), (2), (3);

*f*) (1), (2), (3), (4), (5);

*g*) (6);

*h*)  $B$ : (2), (3), (4), (6);  $C \setminus A$ : (6), (7); így  $B \cap (C \setminus A)$ : (6);

**185.**





- i) (1), (2), (3), (4), (5);  
 j) (3);  
 k) (2);  
 l)  $B$ : (2), (3), (4), (6);  $C \cap A$ : (4), (5); így  $B \setminus (C \cap A)$ : (2), (3), (6);  
 m) (4), (5), (6).
- 187.**  $\overline{A} = \{0 \text{ és a } 10\text{-nél nem kisebb egész számok}\}$ ,  $\overline{B} = \{\text{legfeljebb kétjegyű páros természetes számok}\} \cup \{\text{legalább háromjegyű természetes számok}\}$ .
- 188.** a)  $\overline{A} = \{x \in \mathbf{Z} \mid -9 \leq x \leq -3, \text{ valamint } 6 \leq x \leq 9\}$ ;  
 b)  $\overline{B} = \{x \in \mathbf{Z} \mid -9 \leq x \leq -6 \text{ vagy } x = 9\}$ ;  
 c)  $\overline{\overline{A}} = A$ ;  
 d) Ha az alaphalmaz  $B$ ,  $\overline{A} = B \setminus A = \{-5, -4, -3, 6, 7, 8\}$ .
- 189.** a)  $\{0\}$ ;  
 b)  $\mathbf{Z}_0^-$  (vagyis  $\mathbf{Z}^- \cup \{0\}$ );  
 c)  $\mathbf{Z}^-$ ;  
 d)  $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ ; azon racionális számok halmaza, amelyek nem egészek (képlet-  
 tel:  $\frac{a}{b}$  alakú számok, ahol  $a, b \in \mathbf{Z}$ ,  $(a, b) = 1$ ,  $b \neq \pm 1$  (és persze  
 $a, b \neq 0$ ));  
 e)  $\mathbf{Q}^*$ ;  
 f) nem értelmezzük,  $\mathbf{Q} \not\subset \mathbf{Q}^*$ ;  
 g) nem értelmezzük,  $\mathbf{N} \not\subset \mathbf{Q}^*$ .
- 190.** a) (3), (4);  
 b) (1), (4);  
 c) (4);  
 d) (1), (3), (4);  
 e) (2), (3), (4);  
 f) (1), (2), (4).
- 191.** a)  $\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ ;  
 b)  $H \setminus \{5, 10\}$ ;  
 c)  $H \setminus \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ;  
 d)  $\{11, 13, 17, 19\}$ ;  
 e)  $H \setminus \{15\}$ ;  
 f)  $\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ ;  
 g)  $\{11, 12, 13, \dots, 19\}$ .
- 192.** a) {a legalább egy fordulóban 35 pontot elért diákok};  
 b) {a mindhárom fordulóban 35 pontot elért diákok};  
 c) {azok a diákok, akik az első két fordulóban elérték a 35 pontot, de a  
 harmadikban nem};  
 d) {a csak az első fordulóban 35 pontot elért diákok};  
 e) {a csak az első fordulóban 35 pontot elért diákok};  
 f) {a legfeljebb a 2. fordulóban 35 pontot elért diákok};  
 g) {azok a diákok, akik egyik fordulóban sem érték el a 35 pontot};  
 h) {azok a diákok, akik legfeljebb két fordulóban érték el a 35 pontot};

- i)* {azok a diákok, akik a második vagy harmadik fordulóban elérték a 35 pontot, de az elsőben nem};  
*j)* {azok a diákok, akik az első fordulóban elérték a 35 pontot, de a másik két fordulóban nem}.

Észrevehetjük pl. a *d)* és *e)* válaszok alapján, hogy  $(A \setminus B) \setminus C \equiv A \setminus (B \cup C)$ .

**193.** *a)* (3), (6), (7), (8);

*b)* (7), (8);

*c)* (1), (2), (3), (5), (7), (8);

*d)* (1), (2), (3), (4), (5), (8);

*e)* (8);

*f)* (1), (2), (3), (5), (6), (7), (8);

*g)* (1), (2), (4), (5), (6), (7), (8);

*h)* (1), (5), (6), (7), (8);

*i)* (1), (2), (3), (7), (8);

*j)* (3), (7), (8);

*k)* (1), (3), (8);

*l)* (1), (3), (6), (7), (8).

**194.** *a)*  $A \cup B$  tartományai: (1), (2), (3), (4), (5), (6);  $(A \cup B) \setminus C$  tartományai:

(1), (2), (3);  $\overline{(A \cup B) \setminus C}$  tartományai: (4), (5), (6), (7), (8);

*b)* (6), (7), (8);

*c)* (1), (2), (3), (4), (5), (7), (8);

*d)* (1), (2), (3), (4), (5), (7), (8);

*e)* (6), (7), (8);

*f)* (1), (2), (4), (5), (6), (7), (8);

*g)* (1), (3), (4), (5), (6), (7), (8);

*h)* (1), (4), (5), (7), (8).

Észrevehetjük, hogy  $\overline{(B \cap C) \setminus A} \equiv \overline{B \cap (C \setminus A)}$ , vagyis  $(B \cap C) \setminus A \equiv B \cap (C \setminus A)$ .

**195.** *a)* Azok az elemek tartoznak az  $(A \cup B) \cup C$  halmazba, melyek oszlopaira igaz, hogy az első három sorának valamelyikében 1-es van.

$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ;

*b)*  $A \cap (B \cap C) = \{4\}$  (az aktuális oszlop első három sorában 1-esnek kell lennie);

*c)*  $(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10\}$ ;

*d)*  $A \cup (C \setminus D) = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10\}$ ;

*e)*  $A \cup (C \setminus B) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$ ;

*f)*  $(A \cup C) \setminus (B \cup D) = \{5, 10\}$  ( $A$  vagy  $C$  sorában 1-es áll,  $B$  és  $D$  sorában 0);

*g)*  $\overline{A \cup B} = \{3, 5, 7\}$  ( $A$  és  $B$  sorában is 0 áll);

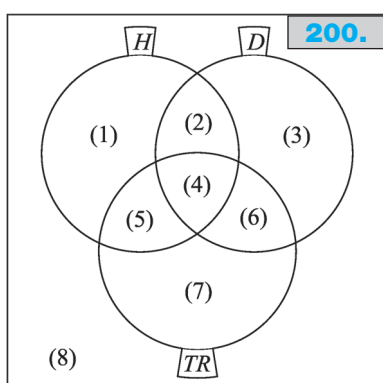
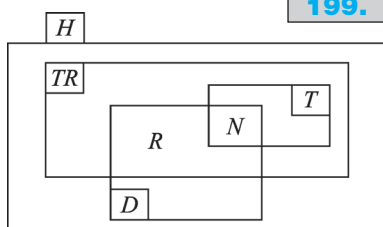
*h)*  $\overline{B \cap (C \setminus D)} = \{4, 9\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\}$ ;

*i)*  $\overline{A \cup B \cup C} = \{3, 7\}$  (az első három sorban 0-nak kell lennie);

*j)*  $\overline{(B \setminus C) \setminus A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$  (nem  $0 - 1 - 0$  kezdetű oszlopok);

*k)*  $\overline{A \cap C} = \{3, 6, 7\}$  ( $A$  és  $C$  sorában is 0 van).

**196.** *a)* [3; 7]; *b)* ]5; 6[; *c)* [3; 5]; *d)* [6; 7].



**199.**  $T$  és  $D$  közös része a négyzetek  $N$  halmazát,  $D$  és  $TR$   $T$ -n kívüli közös része a rombuszok  $R$  halmazát adja.

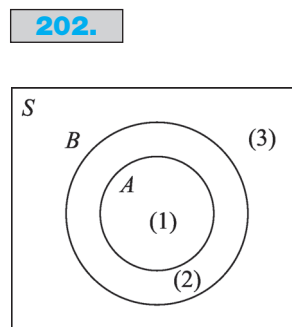
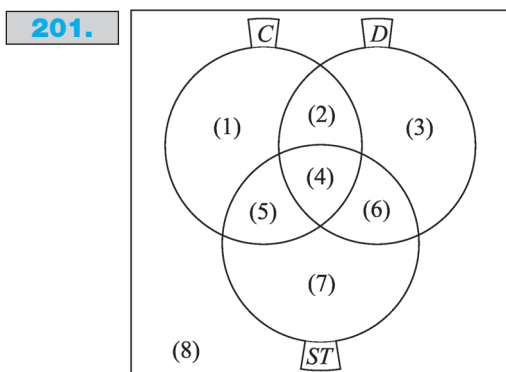
**200.** Ha egy négyszög deltoid és trapéz is, akkor rombusz; ha pedig egy négyszög rombusz és húrnégyszög, akkor négyzet.

$H \cap D \cap T$  az ábra szerinti (4)-es tartomány, ez a négyzetek halmaza.

A nem négyzetek közül (2) a derékszögű deltoidok, (5) a húrtrapézok, (6) a rombuszok halmaza.

**201.**  $C \cap T$  a rombuszok és téglalapok halmaza.

A középpontosan szimmetrikus négyszögek a paralelogrammák,  $C = \{\text{paralelogrammák}\}$ . A tengelyesen szimmetrikus négyszögek lehetnek deltoidok, ha a tükörtengely két csúcson megy át (jelöljük a halmazt  $D$ -vel); valamint lehetnek



**197.** Vegyük észre, hogy  $D \subseteq C$ ! Ezért  $C \cup D = C$ ,  $C \cap D = D$ ,  $D \setminus C = \emptyset$ .

a)  $C$ ; b)  $D$ ; c)  $]-2; 1[ \cup \{5\}$ ; d)  $\emptyset$ ;

e)  $[-10; -2] \cup ]5; 10]$ ; f)  $D$ ;

g)  $\overline{C} = [-10; -2] \cup ]5; 10]$ ;

h)  $\overline{D} = [-10; 1[ \cup ]5; 10]$ ;

i)  $\overline{C \setminus D} = [-10; -2] \cup ([1; 10] \setminus \{5\})$ ; j)  $H$ .

**198.**

a)  $[-5; -2[ \cup ]7; 15]$ ;

b)  $[-5; -2[ \cup ]10; 15]$ ;

c)  $[-5; 6] \cup ]10; 15]$ ;

d)  $[-5; 7] \cup [11; 15]$ ;

e)  $[-5; -2[ \cup [11; 15]$ ;

f)  $[-5; 6] \cup ]7; 15]$ ;

g)  $\overline{(B \setminus C) \setminus A} = \overline{\emptyset} = H$ ;

h)  $[-5; 1] \cup ]7; 15]$ ;

i)  $\overline{(A \cup B) \cap C} = \overline{B \cap C} = [-5; 6] \cup ]10; 15]$ ;

j)  $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A \cup B} = [-5; -2[ \cup ]10; 15]$ ;

k)  $\overline{(A \cap B) \cup C} = \overline{B \cup C} = [-5; 1] \cup [11; 15]$ ;

l)  $\overline{A \cap (B \cup C)} = \overline{A \cap B} = [-5; 1] \cup ]7; 15]$ .

szimmetrikus trapézok, ha a tükörtengely két oldalon megy át (jelölés:  $ST$ ). Ekkor  $T = D \cup ST$ ,  $C \cap T = C \cap (D \cup ST)$ .

A  $C \cap T$  halmaz a Venn-diagram szerinti (2)-es, (4)-es és (5)-ös tartományokat jelenti. (2) és (4) a rombuszok halmaza (ebből (4) a négyzeteké), (5) pedig azon téglalapoké, amelyek nem négyzetek.

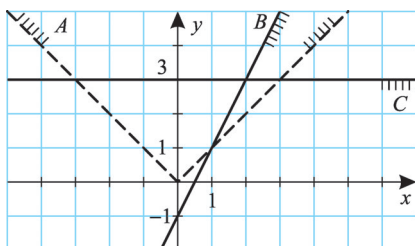
**202.**  $A \setminus B = \emptyset$ ;  $B \setminus A = \{P \in S \mid 5 \text{ cm} < OP \leq 8 \text{ cm}\}$  (az ábra szerinti (2)-es tartomány a belső határa nélkül);  $\bar{A} = \{P \in S \mid 5 \text{ cm} < OP\}$  ((2)-es és (3)-as tartomány).

- 203.** a)  $\{P \in S \mid OP < 5 \text{ cm} \text{ és } QP > 8 \text{ cm}\}$ ;  
 b)  $\{P \in S \mid OP < 5 \text{ cm} \text{ és } QP < 8 \text{ cm}\}$ ;  
 c)  $\{P \in S \mid OP > 5 \text{ cm} \text{ és } QP < 8 \text{ cm}\}$ ;  
 d)  $\{P \in S \mid OP > 5 \text{ cm} \text{ és } QP > 8 \text{ cm}\}$ ;  
 e)  $\{P \in S \mid (OP < 5 \text{ cm} \text{ és } QP > 8 \text{ cm}) \text{ vagy } (OP > 5 \text{ cm} \text{ és } QP < 8 \text{ cm})\}$ ;  
 f)  $\{P \in S \mid (OP < 5 \text{ cm} \text{ és } QP > 8 \text{ cm}) \text{ vagy } (OP > 5 \text{ cm} \text{ és } QP > 8 \text{ cm})\}$ ;  
 g)  $\{P \in S \mid (OP < 5 \text{ cm} \text{ és } QP < 8 \text{ cm}) \text{ vagy } (OP > 5 \text{ cm} \text{ és } QP > 8 \text{ cm})\}$ .

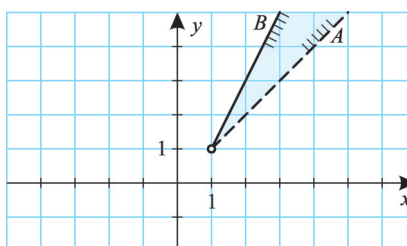
**204.** a), b), c): Az  $A, B, C$  halmazok a 204/a. ábrán láthatók (a szaggatott vonallal jelölt határ nem tartozik a pontthalmazhoz).

d)  $A \cap B$ : 204/d. ábra, e)  $A \cap \bar{C}$ : 204/e. ábra, f)  $\bar{B} \cap C$ : 204/f. ábra

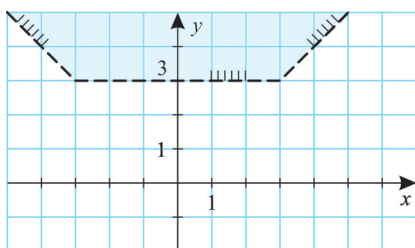
204/a.



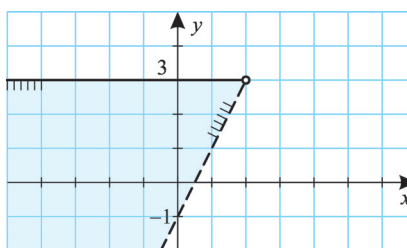
204/d.



204/e.

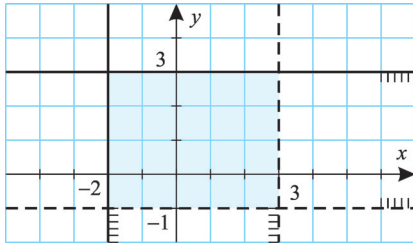


204/f.



- 205.** a)  $A \times B = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$ ;  
 b)  $B \times A = A \times B$ ;  
 c)  $A \times C = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 2), (3; 3), (3; 4)\}$ ;  
 d)  $C \times A = \{(2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 3)\}$ .  
 Általában is igaz, hogy ha  $A = B$ , akkor  $A \times B = B \times A$ .

206.



**206.** A ponthalmaz téglalap, két zárt és két nyílt oldallal.

**207.** a)  $A \setminus B = \{1, 2\}$ ,  $(B \setminus A) = \{6, 7\}$ ,

$$\text{így } (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 6, 7\};$$

$$b) \{1, 2, 6, 7\};$$

$$c) A \Delta B = \{1, 2, 6, 7\};$$

$$d) (A \Delta B) \Delta C = \{1, 2, 6, 7\} \Delta \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 4, 7, 8, 10\};$$

$$e) A \Delta (B \Delta C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Delta \{2, 3, 5, 7, 8, 10\} = \{1, 4, 7, 8, 10\}.$$

Általában is igaz, hogy  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ , valamint  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .

**208.** a)  $\emptyset$ ; b)  $\emptyset$ .

**209.** Az elemszámok: a)  $a^2$ ; b)  $ab$ ; c) 0; d) 0; e) 0 és  $a + b$  közötti egész szám; f)  $a$ .

**210.** a)  $B$ ; b)  $A$ ; c)  $\emptyset$ ; d)  $-e$ : azon  $B$ -beli elemek halmaza, amelyek  $A$ -ban nincsenek benne; f)  $\emptyset$ .

A halmazok elemszáma: a)  $b$ ; b)  $a$ ; c) 0; d)  $b - a$ ; e)  $b - a$ ; f) 0.

**211.** Ha  $A \cap B = B$ , akkor  $B \subseteq A$ . a)  $A$ ; b) azon  $A$ -beli elemek halmaza, amelyek  $B$ -ben nincsenek benne; c)  $\emptyset$ ; d)  $\emptyset$ ; e) azon  $A$ -beli elemek halmaza, amelyek  $B$ -ben nincsenek benne.

**212.** a)  $A$ ; b)  $B$ ; c)  $B$ ; d)  $A$ . Az elemszámok: a)  $a$ ; b)  $b$ ; c)  $b$ ; d)  $a$ .

**213.** Ha  $A \setminus B = \emptyset$ , akkor  $A \subseteq B$ . a)  $B$ ; b)  $A$ ; c)  $-d$ : azon  $B$ -beli elemek halmaza, amelyek  $A$ -ban nincsenek benne; e)  $\emptyset$ .

**214.** Igaz mindegyik állítás, és a megfordításuk is.

**215.** Szemléltessük az  $A, B, C$  halmazokat Venn-diagrammally! (215–221. feladatok; az ábrán sorszámoztuk az egyes tartományokat.)

a)  $A \subseteq \bar{A}$  tartományokkal felírva az  $(1) \cup (2) \cup (4) \cup (5) \subseteq (3) \cup (6) \cup (7) \cup (8)$  tartalmazást jelenti, s ez csak akkor teljesülhet, ha  $A = \emptyset$ ;

b) az (1), (5), (3), (6) tartományok üres halmazok, vagyis  $A = B$ ;

c) üres tartományok: (1), (5), (3), (6), így  $A = B$ .

**216.**

a)  $(1) \cup (2) \cup (4) \cup (5) = (1) \cup (2) \cup (4) \cup (5) \cup (3) \cup (6)$ , így (3), (6) üres halmazok,  $B \subseteq A$ ;

b)  $B \subseteq A$ ;

c)  $(2) \cup (4) = (1) \cup (5)$ , vagyis  $A = \emptyset$ ;

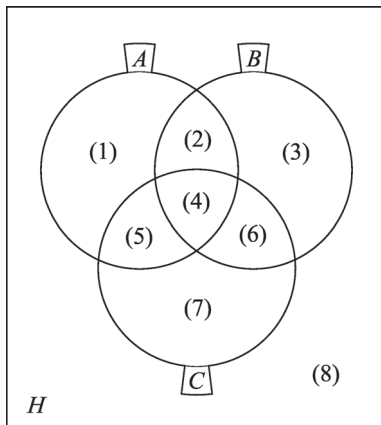
d) mindig igaz.

**217.** a)  $B = C$ ;

b)  $(1) = (1) \cup (5)$ , vagyis az (5) tartomány üres halmaz;

c)  $(1) = ((1) \cup (5)) \cap ((1) \cup (2)) = (1)$ , vagyis mindig igaz, azonosság.

215–221.

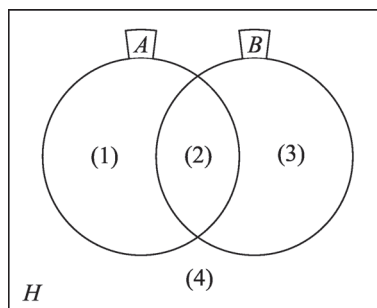


- 218.** a)  $(1) \cup (2) \cup (5) = ((1) \cup (5)) \cup ((1) \cup (2)) = (1) \cup (2) \cup (5)$ , tehát azonos-ság;  
 b) (2), (4), (5) üres halmazok;  
 c)  $(2) \cup (4) \cup (5) = (2) \cup (4) \cup (5) \cup (6) \cup (7)$ , innen (6), (7) üres halmazok.
- 219.** a)  $A \setminus (A \setminus B) = ((1) \cup (2) \cup (4) \cup (5)) \setminus ((1) \cup (5)) = (2) \cup (4)$ ,  $A \cap B = (2) \cup (4)$ , azonosság;  
 b)  $(5) = ((4) \cup (5)) \setminus ((4) \cup (6))$  azonosság;  
 c)  $(1) \cup (5) \cup (3) \cup (6) \subseteq (1) \cup (2) \cup (3) \cup (4) \cup (5) \cup (6)$ , azonosság.
- 220.** a)  $(2) = ((1) \cup (2)) \cap ((2) \cup (3))$ , azonosság;  
 b)  $((1) \cup (2) \cup (3) \cup (4) \cup (5) \cup (6)) \setminus ((1) \cup (5)) = (2) \cup (3) \cup (4) \cup (6)$ , azonosság.
- 221.** a)  $((1) \cup (2) \cup (4) \cup (5)) \setminus ((2) \cup (3)) = ((1) \cup (5)) \setminus ((4) \cup (5) \cup (6) \cup (7))$ , innen  $(1) \cup (4) \cup (5) = (1)$ , vagyis (4), (5) üres halmazok, azaz  $A \cap C = \emptyset$ ;  
 b) (2), (4), (5), (6) üres halmazok, vagyis semelyik két halmaznak sincs közös eleme.
- 222.** a)  $\emptyset$ ; b)  $A$ ; c)  $\emptyset$ ; d)  $H$  alaphalmaz; e)  $\emptyset$ ; f)  $\emptyset$ ; g)  $A \setminus B$ ; h)  $B \setminus A$ ;  
 i)  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ ; j)  $A \Delta B$ .
- 223.** a)  $A \cup B \cup C = C$ , tehát hamis az állítás;  
 b)  $A \cap B \cap C = A$ , hamis az állítás;  
 c)  $x \in A \setminus B$ , hamis az állítás;  
 d) igaz, hiszen  $x \in A$ ;  
 e) igaz a definíció alapján;  
 f) igaz a definíció alapján.

**224.** Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, és sorszámozzuk az egyes tartományokat!

- a)  $A \cup B = (1) \cup (2) \cup (3)$ ,  $\overline{A \cup B} = (4)$ ;  
 $\overline{A} = (3) \cup (4)$ ,  $\overline{B} = (1) \cup (4)$ ,  
 $\overline{A} \cap \overline{B} = (4)$ . Vagyis az egyenlet két oldala megegyezik, azonosságot kaptunk.
- b)  $\overline{A \cap B} = (1) \cup (3) \cup (4)$ ,  $\overline{A} \cup \overline{B} = (1) \cup (3) \cup (4)$ , azonosság.

**224.**



- 225.** a)  $(1) = \overline{A \cup B}$ ,  $(2) = \overline{A \cap B}$ ,  $(3) = \overline{B \cup A}$ ,  $(4) = \overline{B \cap A}$ .

Ebből persze következik, hogy pl.  $A \Delta B$  (és bármely kétváltozós halmazművelet) is megadható az unió és komplementer műveletek segítségével, hiszen  $A \Delta B = (1)$ , (3), vagyis  $A \Delta B = \overline{A \cup B} \cup \overline{B \cup A}$ .

b)  $(1) = A \cap \overline{B}$ ,  $(2) = A \cap B$ ,  $(3) = \overline{A} \cap B$ ,  $(4) = \overline{A} \cap \overline{B}$ .

c)  $(1) = A \setminus B$ ,  $(2) = B \setminus \overline{A}$  vagy  $(2) = A \setminus \overline{B}$ ,  $(3) = B \setminus A$ ,  $(4) = \overline{A} \setminus B$  vagy  $(4) = \overline{B} \setminus A$ .

**226.** Több megoldás is van.

a)  $(1) = A \setminus (B \cup C)$  vagy  $(A \setminus B) \setminus C$ ;

b)  $(2) = (A \setminus C) \setminus (1)$ , hiszen az (1) tartományt már kifejeztük;

c) A (2) és (5) tartományok a  $B$  és  $C$  halmazokat tekintve szimmetrikus helyzetűek, így (5) hasonlóan írható fel, mint (2).

Ezért  $(4) = A \setminus ((1) \cup (2) \cup (5))$ .

Figyelembe véve az egyes tartományok szimmetrikus helyzetét, az unió (és különbség) műveletek további alkalmazásaival nyilván bármely részhalmazkombinációk felírhatók.

**227.**  $A \cap B \cap C = (4)$ ,  $\overline{A} \cap B \cap C = (6)$ ,  $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C = (7)$ ,  $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (8)$ .

Az  $X \cap Y \cap Z$  kifejezésben rendre  $X$  helyére  $A$ -t, illetve  $\overline{A}$ -t,  $Y$  helyére  $B$ -t, illetve  $\overline{B}$ -t,  $Z$  helyére  $C$ -t, illetve  $\overline{C}$ -t helyettesítve a kifejezés  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  különböző értéket vehet fel, s ezek éppen az (1), (2), ..., (8) tartományok lesznek. (Ez utóbbi könnyen belátható: egy adott tartomány esetén sorra el kell dönteni, hogy az  $A, B, C$  halmazoknak részhalmaza vagy sem.)

Ezzel az eljárással háromnál több halmaz esetén is bármelyik tartományt megadhatjuk. (Az  $n$  számú halmaz esetén  $2^n$ -féle kifejezést írhatunk fel, s éppen ennyi a keletkezett tartományok száma.)

**228.**  $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) = \{1, 3, 5\}$ ,  $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

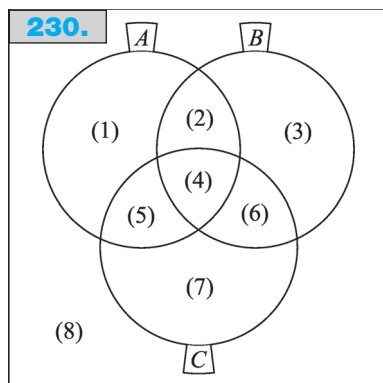
**229.**  $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) = \{4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13\}$ .

$A = (A \cup C) \setminus (C \setminus A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11\}$ .

Mivel  $C \setminus A = \{12, 13, 14, 15\}$ , s  $A \cap B \cap C = \{11\}$ ,  $C$  hatodik eleme az  $A \setminus B = \{1, 2, 3, 9, 10\}$  halmaz elemei közül bármelyik lehet. Öt megoldás van.

**230.** A tanulókra sorszámukkal hivatkozhatunk. Ekkor  $A = \{4, 5, 7, 8, 12, 13\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 12, 13\}$ ,  $C = \{3, 5, 6, 8, 10, 13, 14\}$ . Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal!

Az ábrán (1), (2), ..., (8) jelöli az egyes tartományokat.



a)  $A \cup B \cup C =$

$$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14\};$$

b) (1):  $A \setminus (B \cup C) = \{4\}$ ;

c) (1), (3), (7) és (8)-as tartományok:  $\{1, 2, 4, 6, 9, 10, 11, 14, 15\}$ ;

d) (1), (3) és (7)-es tartományok:  $\{1, 4, 6, 10, 14\}$ ;

e) (2), (5) és (6) tartományok:  $\{3, 7, 12\}$ ;

f) (5) és (7) tartományok:  $C \setminus B = \{6, 10, 14\}$ ;

g) ez a körülírás nem teljesül az (1), (3) és (7)-es tartományokra, tehát a  $d$ ) halmaz komplementerét kapjuk:  $\{2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15\}$ .

Halmazműveletekkel az összes tartományt megadhatjuk. Pl. a  $d$ ) feladatban  $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) = (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ ; vagy egy másik lehetőség:  $(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C))$ .

## Halmazok elemszáma

**231.**  $A = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$ ,  $B = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$ ,  $C = \{1, 4, 9, 16, \dots, 100\}$ ,  
 $D = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots, 97\}$ .

- a)  $|A| = 50$ .  
 b)  $|B| = 33$ .  
 c)  $|\overline{C}| = 90$ , hiszen 10 négyzetszám van  $H$ -ban.  
 d)  $|D| = 25$ .  
 e)  $|A \cup B| = 50 + 33 - 16 = 67$ .  $|A \cap B| = 16$ , s ezt számoltuk  $|A|$ -ban és  $|B|$ -ban is, tehát egyszer le kell vonni.  $A \cap B$  a 6-tal osztható számokat tartalmazza  $H$ -ból.  
 f)  $|B \cap C| = 3$ ;  $B \cap C = \{3^2, 6^2, 9^2\}$ .  
 g)  $|B \cap D| = 1$ ; a  $H$ -beli prímszámok közül csak a 3 osztható 3-mal.  
 h)  $|A \setminus C| = 45$ , mert  $A \cap C = \{2^2, 4^2, 6^2, 8^2, 10^2\}$ .  
 i)  $|\overline{A \cup C}| = 45$ , mert  $|A \cup C| = 55$ .  
 j)  $|\overline{A \setminus C}| = 55$ .  
 k)  $|\overline{C \setminus A}| = 95$ , mert  $C \setminus A = \{1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2\}$ .  
 l)  $|\overline{C \cap D}| = 100$ , mert  $C \cap D = \emptyset$ .

- 232.** a)  $|A \cap B| \in \{0, 1, \dots, 8\}$ ;  
 b)  $|A \cup B| \in \{11, 12, \dots, 19\}$ ;  
 c)  $|A \setminus B| \in \{0, 1, \dots, 8\}$ ;  
 d)  $|B \setminus A| \in \{3, 4, \dots, 11\}$ .

A szélsőértékeket  $A \cap B = \emptyset$ , illetve  $A \subseteq B$  esetekben kapjuk.

**233.**  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ ,  $(A \cup B) \setminus A = A \setminus B$ .  $|A| = 5$ ,  $|B| = 3$ . Érdemes a halmazokat Venn-diagrammal szemléltetni.

**234.**  $|A \cap B| = |A| - |A \setminus B| = 4$ . Innen  $|B \setminus A| = 5$ ,  $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A| = 12$ .  
 Másképpen:  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 7 + 9 - 4 = 12$ . Érdemes a halmazokat Venn-diagrammal szemléltetni.

**235.** Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, s jelöljük (1), (2), (3), ..., (7)-tel az egyes tartományok elemszámait (235/I. ábra)!

Ekkor 7 egyenletet kapunk 7 ismeretlennel:

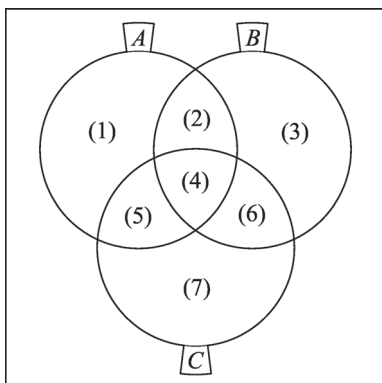
1.  $(1) + (5) = 5$ ,
2.  $(2) + (3) = 5$ ,
3.  $(6) + (7) = 4$ ,
4.  $(4) = 1$ ,
5.  $(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) = 13$ ,
6.  $(1) + (2) + (4) + (5) + (6) + (7) = 12$ ,
7.  $(4) + (5) + (6) + (7) = 7$ .

Az első 4 egyenlet összeadásából  $|A \cup B \cup C| = 15$ , az 5. egyenletből  $(7) = 2$ , a 6. egyenletből  $(3) = 3$ , a 7., 4. és 3. egyenletből  $(5) + (6) + (7) = 6$ ,  $(5) = 2$ .

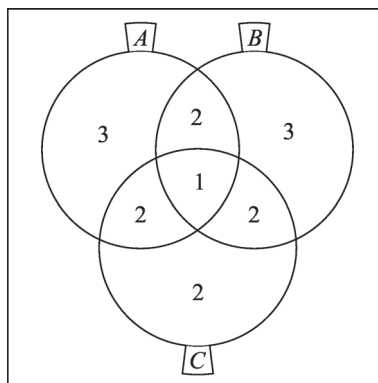


II

235/I.



235/II.



Ezután az 1., 2., 3. egyenletekből rendre meghatározhatjuk (1), (2), (6) értékeit:  
 $(1) = 3$ ,  $(2) = 2$ ,  $(6) = 2$ .

A 235/II. ábrán tüntettük fel az egyes tartományok elemszámát.

$|A| = 8$ ,  $|B| = 8$ .

**236.** a)  $|A \times B| = 24$ ;

b)  $(A \times B) \cap (B \times A) = \{4, 5, 6\} \times \{4, 5, 6\}$ , az elemszám 9.

**237.** a) Igaz.

b) Hamis; csak akkor igaz, ha  $A \cap B = \emptyset$ .

c) Igaz.  $|A \cap B| \leq |A|$  és  $|A \cap B| \leq |B|$  egyenlőtlenségek összeadásából következik. (Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha  $A = B$ .)

d) Igaz. (Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha  $A \cap B = \emptyset$ .)

e) Igaz.  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$  és  $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ .

f) Igaz.  $A \cap B$  elemeit kétszer számoltuk.

g) Hamis. Lehet egyenlőség is, ha  $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$ .

h) Igaz.  $|A \cap B \cap C| \leq |A|$ ,  $|A \cap B \cap C| \leq |B|$  és  $|A \cap B \cap C| \leq |C|$  egyenlőtlenségek összeadásából következik. (Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha  $A = B = C$ .)

**238.** a) az első három sor valamelyikében 1-es van: 8;

b) az első három sor mindegyikében 1-es van: 1;

c) 7;

d) 7;

e) 6;

f) az 1. és 3. sor valamelyikében 1-es szerepel, feltéve, hogy a 2. és 4. sorokban 0 van: 2;

g) az első két sorban 0 szerepel: 3;

h) 8;

i) 2;

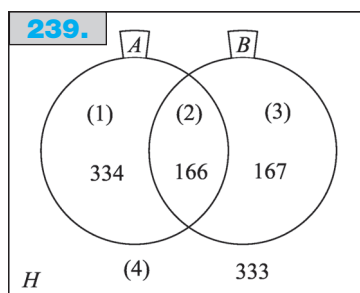
j) azok az elemek nem tartoznak ebbe a halmazba, amelyek B-ben benne vannak, de A-ban és C-ben nem: 9;

k) az 1. és 3. sorban 0 van: 3.

**239.** Legyen  $A$  és  $B$  a 2-vel, illetve 3-mal osztható számok halmaza. Ekkor  $|A| = 500$ ,  $|B| = 333$ ,  $|A \cap B| = 166$  ( $A \cap B$  a 6-tal osztható számok halmaza).

Az alábbi Venn-diagrammon az egyes tartományokat (1), (2), (3), (4)-gyel jelöltük, s  $A \cap B$ -ből kiindulva meghatároztuk az elemszámaikat.

- a) 500;  
 b) 333;  
 c) 166;  
 d)  $|A \cup B| = 667$ ;  
 e)  $|A \Delta B| = 501$ ;  
 f)  $|A \cup B| = 667$ ;  
 g) pontosan az egyik számmal vagy egyikkel sem osztható számok: (1), (3) és (4)-es tartományok: 834;  
 h)  $|A \Delta B| = 501$ ;  
 i) az állítás az (1)-es tartomány számaira nem teljesül: 666;  
 j) az állítás az (1) és (3) tartományokra nem teljesül: 499;  
 k) (4)-es tartomány: 333.



**240.**  $70\% + 80\% = 150\%$ , ezért 50%-a 15 fő. Az osztálylétszám 30. Az ellenőrzést a szövegbe való visszahelyettesítéssel végezhetjük el.

**241.**  $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{19}{15}$ , így az osztály  $\frac{4}{15}$  része közepes tanuló.  $30 \cdot \frac{4}{15} = 8$ .

A közepesnél jobb tanulók száma  $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{15}\right) \cdot 30 = 12$ , jegyeik összege  $4 \cdot 12 = 48$ .

A közepesnél gyengébb tanulók száma  $\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{15}\right) \cdot 30 = 10$ , jegyeik összege

$2,5 \cdot 10 = 25$ .

Az összes tanuló jegyének összege  $48 + 25 + 24 = 97$ , az osztályátlag  $\frac{97}{30} \approx 3,23$ .

**242. Első megoldás:** Jelöljük az első, második, illetve harmadik feladatot hibátlanul megoldó tanulók halmazát rendre  $A$ ,  $B$ ,  $C$ -vel, és szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal! A 242/I. ábrán az egyes tartományok elemszámát (1), (2), (3), ..., (8)-cal jelöltük, a feladat (8) meghatározása. Ekkor a feltételek alapján a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

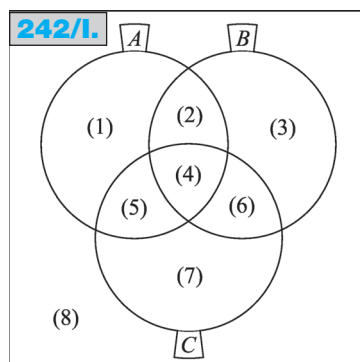
$$(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) = 30,$$

$$(1) + (2) + (4) + (5) = 19,$$

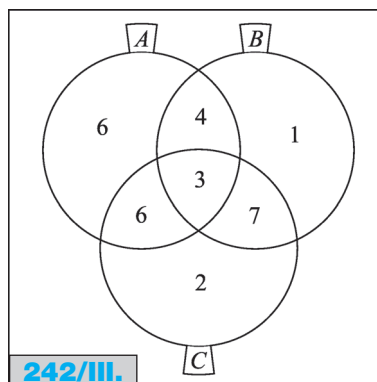
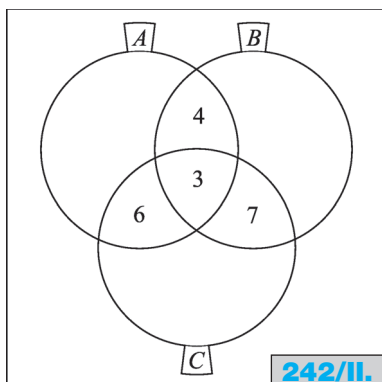
$$(2) + (3) + (4) + (6) = 15,$$

$$(4) + (5) + (6) + (7) = 18,$$

$$(2) + (4) = 7,$$



II



$$\begin{aligned}(4) + (6) &= 10, \\ (4) + (5) &= 9, \\ (4) &= 3.\end{aligned}$$

Ebből a 8 egyenletből a 8 ismeretlent könnyen meghatározhatjuk. Az utolsó négy egyenletből  $(5) = 6$ ,  $(6) = 7$ ,  $(2) = 4$ , majd folytatva a visszahelyettesítést, a 2., 3. és 4. egyenletből  $(1) = 6$ ,  $(3) = 1$ ,  $(7) = 2$  adódik. Végül az első egyenletből  $(8) = 1$ , vagyis egy diák nem tudott egyetlen feladatot sem megoldani.

Az egyenletrendszer megoldásának hátterében tulajdonképpen az egyes halmaztartományok elemszámának rendszeres meghatározása áll. Az  $A \cap B \cap C$  halmaz elemszámát ismerve, „belülről kifelé” haladva először az  $(A \cap B) \setminus C$ ,  $(B \cap C) \setminus A$ ,  $(A \cap C) \setminus B$  elemszámokat határozhatjuk meg (242/II. ábra).

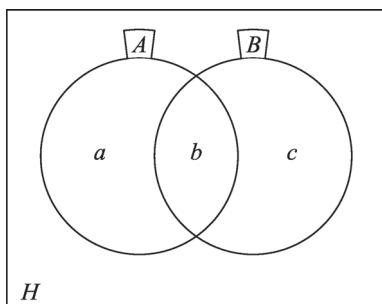
Ezután az  $A \setminus (B \cup C)$ ,  $B \setminus (A \cup C)$ ,  $C \setminus (A \cup B)$  tartományok következnek (242/III. ábra).

És végül  $|A \cup B \cup C|$  ismeretében  $\overline{A \cup B \cup C}$  meghatározható.

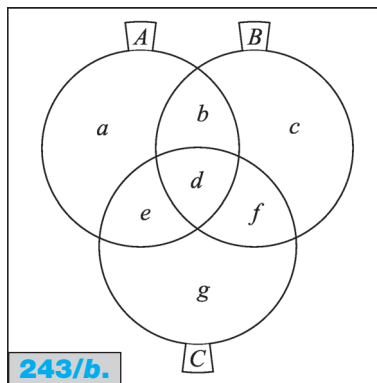
*Második megoldás:*  $|A \cup B \cup C|$  meghatározásához az  $|A| + |B| + |C|$  összegből le kell vonni a kétszeres tartományok elemszámát,  $|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|$ -t, hiszen ezeket kétszer számoltuk. Ekkor az  $A \cap B \cap C$  tartományt háromszor hozzáadtuk és háromszor ki is vontuk az összegből, ezért még egyszer be kell számítanunk. Tehát:  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$ , s innen  $\overline{A \cup B \cup C}$  számolható.

Ha tudjuk, hogy van megoldás, akkor készen vagyunk. Egyébként az első megoldáshoz hasonló módon meg kell bizonyosodnunk arról, hogy léteznek a feltételeknek megfelelő halmazok.

**243. a)** A Venn-diagramon az egyes tartományok elemszámait rendre  $a$ ,  $b$ ,  $c$ -vel jelölve  $a + b + c = a + b + b + c - b$  a bizonyítandó azonosság, s ez teljesül.

**243/a.**

b) A Venn-diagrammon az egyes tartományok elemszámait rendre  $a, b, c, \dots, g$ -vel jelölve a bizonyítandó állítás:  $a + b + c + d + e + f + g = a + b + d + e + b + c + d + f + d + e + f + g - (b + d) - (d + e) - (d + f) + d$ , s ez teljesül.



243/b.

**244.** Jelöljük  $A, B$ , illetve  $C$ -vel az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül a 2-vel, 3-mal, illetve 5-tel osztható számok halmazát! Ekkor  $|A|=500, |B|=333, |C|=200, |A \cap B|=166, |B \cap C|=66, |A \cap C|=100, |A \cap B \cap C|=33$ . (Pl.  $A \cap B$  a 2-vel és 3-mal, vagyis 6-tal osztható számok halmazát jelenti.)

a) Alkalmazzuk a logikai szita formulát!  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 500 + 333 + 200 - 166 - 66 - 100 + 33 = 734$ ;

b)  $|A \cup B \cup C| = 1000 - 734 = 266$ ;

c)  $|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 500 - 166 - 100 + 33 = 267$

(az  $|A \cap B \cap C|$ -t kétszer is levontuk  $|A|$ -ből, ezért egyszer hozzá kell adni);

d)  $|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 3|A \cap B \cap C| = 166 + 66 + 100 - 3 \cdot 33 = 233$ , hiszen az  $A \cap B \cap C$  tartomány elemeit háromszor is számoltuk.

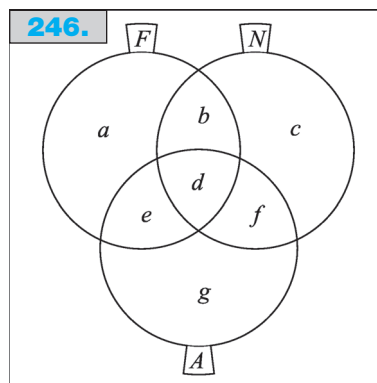
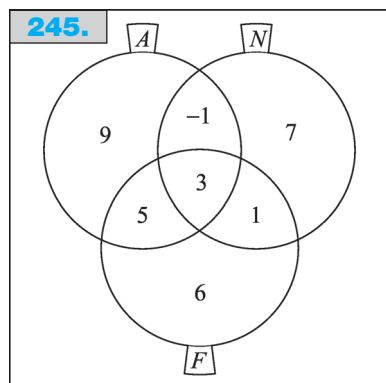
**245.** Szemléltessük a három halmazt Venn-diagrammal, s „belülről kifelé” haladva írjuk be az egyes tartományok elemszámát.

A feladatnak nincs megoldása, hiszen nem lehet negatív azon tanulók száma, akik angolul és németül tanulnak, míg franciául nem. (Az ellentmondás abból a feltételből következik, hogy angolul és németül ketten, míg mindhárom nyelven hárman tanulnak.)

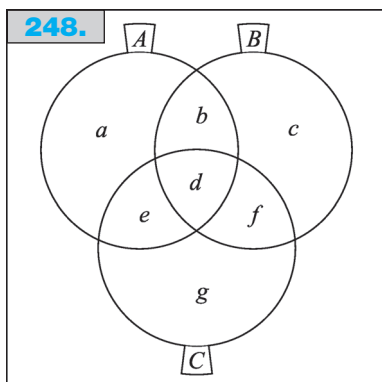
Általában is igaz, hogy a logikai szita alkalmazásakor feltesszük, hogy létezik megoldás. Hogy ez valóban így van, arról ellenőrzéssel győződhetünk meg.

**246.** a) Mivel  $20 + 22 + 25 = 67 = 2 \cdot 30 + 7$ , ezért legalább 7-en beszélnek mindhárom nyelven. A maximális érték 20, amikor az összes franciául beszélő a másik két nyelven is beszél; s minden 7 és 20 közötti érték lehetséges.

b) Az ábrán az elemszámokat  $a, b, \dots, g$ -vel jelöltük. Ekkor  $a + b + d + e = 20$ ,



II



$b + c + d + f = 22$ ,  $d + e + f + g = 25$ , s mivel  $a + b + c + d + e + f + g = 30$ , ezért  $b + e + f + 2 \cdot d = 37$ . A kérdés  $b + d + e + f$ . Az a) feladat megoldásában láttuk, hogy  $7 \leq d \leq 20$ ;  $b + d + e + f = 37 - d$ , ezért a két vagy három nyelvet beszélők száma 17-től 30-ig terjedhet, vagyis legalább 17.

**247.**  $|A|$  és  $|B|$  osztója 60-nak.

$|A \cup B| \geq 10$ ; akkor lehet egyenlőség, ha pl.  $|A| = 6$ ,  $|B| = 10$  és  $A \subseteq B$ .

$|A \cup B| \leq 61$ ; akkor lehet egyenlőség, ha pl.  $|A| = 1$ ,  $|B| = 60$  és  $A \cap B = \emptyset$ .

$|A \cap B| = 0$ , ha  $A \cap B = \emptyset$ .

$|A \cap B| \leq 6$ ; akkor lehet egyenlőség, ha pl.  $|A| = 6$ ,  $|B| = 10$  és  $A \subseteq B$ .

**248.** Az ábrán az elemszámokat  $a, b, \dots, g$ -vel jelöltük. Ekkor  $a + b + d + e = 7$ ,  $b + c + d + f = 8$ ,  $d + e + f + g = 9$ ,  $d = 3$ . Innen  $a + b + c + d + e + f + g = 7 + 8 + 9 - b - e - f - 2 \cdot 3$ , vagyis  $18 - (b + e + f)$ .

$|A \cup B \cup C| \leq 18$ ;  $|A \cup B \cup C| = 18$  akkor lehet, ha  $b = e = f = 0$ , vagyis  $a = 4$ ,  $c = 5$ ,  $g = 6$ .

A  $b + e$  legfeljebb 4 lehet, ha  $a = 0$ ;  $f$  legfeljebb 5 lehet, ha  $c = 0$ .

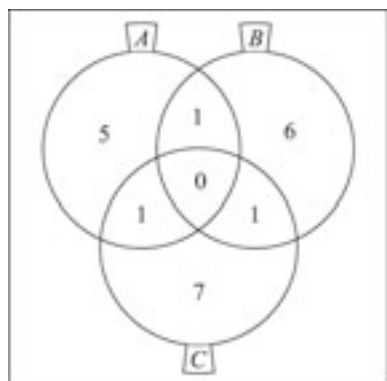
Így  $|A \cup B \cup C| = 18 - (b + e + f) \geq 18 - (4 + 5) = 9$ .

**249. a)**  $|A| + |B| + |C| = 24$ , de legalább három elemet kétszer számoltunk, ezért  $|A \cup B \cup C| \leq 21$ . Ez a maximum elérhető. (A 249/I. ábrán az egyes részhalmazok elemszámait tüntettük fel.)

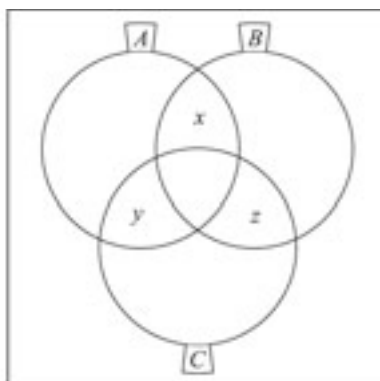
$|A| + |B| + |C| = 24$ , és minden elemet legfeljebb kétszer számolhattunk, ezért  $|A \cup B \cup C| \geq 12$ . A minimumot akkor kaphatjuk meg, ha minden elem pontosan két halmazhoz tartozik. (A 249/II. ábrán  $x, y, z$ -vel jelöltük a megfelelő részhalmazok elemszámait.)

Ekkor  $x + y = 7$ ,  $x + z = 8$ ,  $y + z = 9$ . Az egyenletek összeadása után  $x + y + z = 12$ , az egyenletrendszer megoldása  $x = 3$ ,  $y = 4$ ,  $z = 5$ , tehát a minimum elérhető.

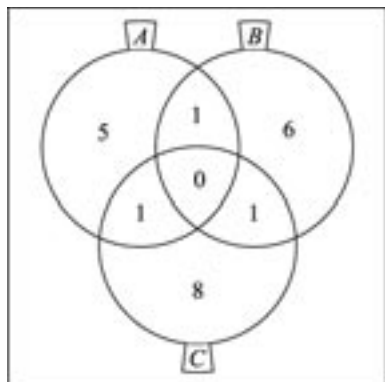
**249/I.**



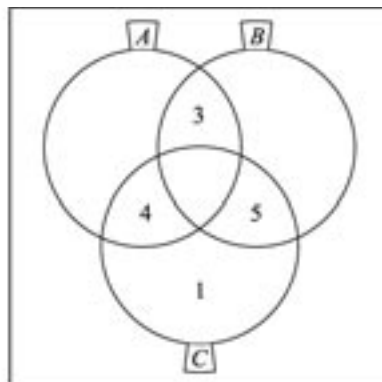
**249/II.**



249/III.



249/IV.



b) Az a) megoldás gondolatmenetével  $|A \cup B \cup C| \leq 22$ , s ez a maximum elérhető (249/III. ábra).

A minimum meghatározásakor az  $x + y = 7$ ,  $x + z = 8$ ,  $y + z = 10$  egyenletrendszernek nincs megoldása a természetes számok halmazán, ezért van olyan elem, amely csak egy halmazba tartozik.  $|A \cup B \cup C| \geq 13$ , az egyelőségre egy konstrukciót a 249/IV. ábra mutat.

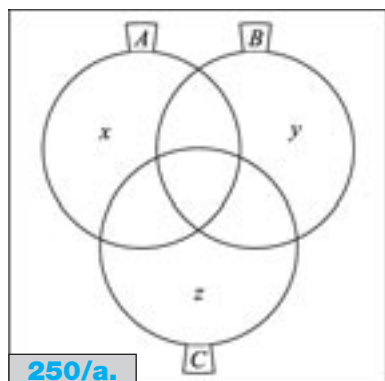
**250. a)**  $|A \cup B \cup C| \geq 7$ ; egyenlőség lehet, ha pl.  $C \subseteq A \cup B$ .

$|A \cup B \cup C|$  akkor lehet maximális, ha  $|A \cup B| = |A| + |B|$  stb., vagyis minden elem pontosan egy halmazhoz tartozik. (A 250/a. ábrán  $x, y, z$ -vel jelöltük a megfelelő részhalmazok elemszámait.)

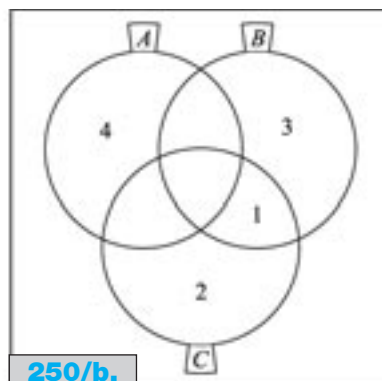
Ekkor az  $x + y = 7$ ,  $x + z = 7$ ,  $y + z = 6$  egyenletrendszer megoldása  $(x, y, z) = (4, 3, 3)$ ,  $|A \cup B \cup C| = 10$ .

b)  $|A \cup B \cup C| \geq 8$ ; egyenlőség lehet, ha pl.  $C \subseteq A \cup B$ .

A maximum meghatározása:  $|A \cup B| + |A \cup C| + |B \cup C| = 21$ , páratlan szám. Nem lehetséges, hogy ebben az összegben minden elemet pontosan kétszer számoltunk; legalább egy elem két halmazhoz is tartozik. Az  $|A \cup B \cup C| = 10$  maximumra egy példa a 250/b. ábrán látható.



250/a.



250/b.



**251. a)**  $|A \Delta B| = 2$ , így a lehetséges elemszámok:

$ A \setminus B $	2	1	0
$ B \setminus A $	0	1	2
$ A $	5	4	3
$ B $	3	4	5

b)  $|A \Delta B| = 3$ , így a lehetséges elemszámok:

$ A \setminus B $	3	2	1	0
$ B \setminus A $	0	1	2	3
$ A $	5	4	3	2
$ B $	2	3	4	5

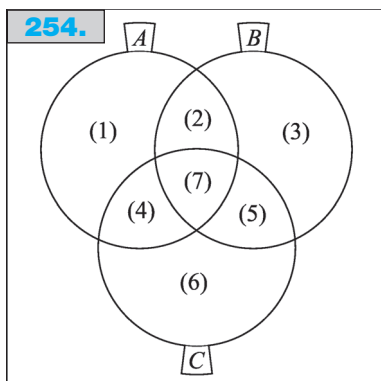
c) Az  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  közös elem nélküli részhalmazok elemszámának összege 5. Öt elemet három (különböző) halmazba  $\binom{5}{3} = 10$ -féleképpen oszt-

hatunk szét. Ez a 10 eset bármelyike az a) és b) megoldásokhoz hasonlóan vizsgálható:  $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$ ,  $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$ . Az  $5 = |A \cup B| \geq |A| \geq 0$  és  $5 \geq |B| \geq 0$  egyenlőtlenségekből következően  $A$  és  $B$  minden 0 és 5 közötti értéket felvehet.

**252.** Ha  $x \in H$ , akkor  $\frac{1}{x} \in H$ ,  $-x \in H$  és  $-\frac{1}{x} \in H$ . Ha  $x \neq \pm 1$ ,  $|H|$  4-gyel osztható. Ha  $1 \in H$ , akkor  $-1 \in H$  és fordítva,  $|H|$  ekkor is páros.

**253.** Ha  $x \in H$ , akkor  $\frac{1}{x} \in H$ . Ha  $x \neq \pm 1$ ,  $|H|$  páros. 1 és  $-1$  reciproka önmaga, ezért  $|H|$  páratlan is lehet, ha 1 vagy  $-1$  közül (pontosan) az egyik szám  $H$ -hoz tartozik.

**254.** Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, s jelöljük (1), (2), (3), ..., (7)-tel az egyes tartományokat (254. ábra)! A 2. feltétel miatt a (7) részhalmaz üres halmaz; az 1. feltétel miatt (2), (4) és (5) nem üres halmazok; a 3. és 4. feltétel miatt (1), (3), (6) üres halmazok, valamint a (2), (4) és (5) részhalmazok elemszáma 1.  
Pl.:  $A = \{b, c\}$ ,  $B = \{c, a\}$ ,  $C = \{a, b\}$ .



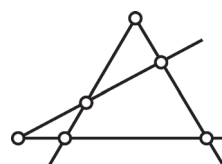
*Megjegyzés:*

A megoldást egyszerű geometriai konstrukcióval is megadhatjuk: legyen a három elem egy háromszög három csúcsa, s a háromszög azonos oldalain levő két-két csúcs alkossa a három halmazt.

**255.** Legyen az  $A \cap B \cap \bar{C} \cap \bar{D}$  típusú részhalmazok elemszáma 1 (a lehető legkevesebb). Ilyen tartomány  $\binom{4}{2} = 6$  darab van, s mivel bármely három halmaz metszete üres halmaz,  $A \cup B \cup C \cup D$  legalább 6 elemű. Ha minden más tartomány elemszáma 0, akkor a 4. feltétel is teljesül. Megfelelő pl. az alábbi négy  $A, B, C, D$  halmaz (a sorokban az egyes halmazoknál 1-est írtunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs):

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$A$	1	1	1	0	0	0
$B$	1	0	0	1	1	0
$C$	0	1	0	1	0	1
$D$	0	0	1	0	1	1

255.



Adhatunk geometriai konstrukciót is.

Kételemű halmazokkal a feladat nem oldható meg; háromelemű halmazokra példa a teljes négyoldal. Ennek csúcsai az elemek, s egy-egy halmazba az egy egyenesen lévő pontok tartoznak (ábra).

**256.** Mivel  $A \cap B \cap C \cap D \cap \bar{E} \neq \emptyset$ , s ilyen típusú tartomány  $\binom{5}{4} = 5$  darab van, ezért  $|A \cup B \cup C \cup D \cup E| \geq 5$ . A konstrukció meg is valósítható:

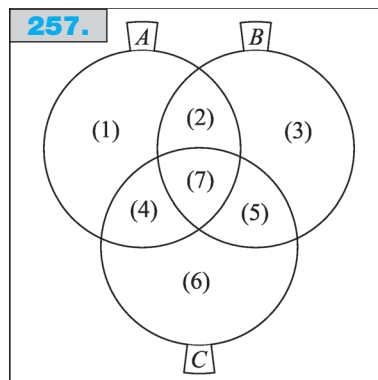
	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$A$	1	1	1	1	0
$B$	1	1	1	0	1
$C$	1	1	0	1	1
$D$	1	0	1	1	1
$E$	0	1	1	1	1

**257.** Első megoldás: Pl. az ábra  $A, B, C$  halmazainak  $(i)$ -vel jelölt részhalmazaiba kerüljenek a  $7k + i$  alakú számok, ahol  $k \in \mathbf{Z}$ ; s a  $7k$  alakú egész számokat kihagyjuk.

Második megoldás: A (7) tartomány legyen az üres halmaz; a többi  $(i)$  tartományba kerüljenek a  $6k + i$  alakú egész számok ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

Harmadik megoldás:  $A = \{\text{páros számok}\}$ ;  $B = \{\text{3-mal osztható egész számok}\}$ ;

257.



$C = \{6\text{-tal nem osztható egész számok}\}$ . Ekkor az (1), (3), (7) részhalmazok üres halmazok.

*Negyedik megoldás:* Egy megfelelő geometriai konstrukció pl. a háromoldalú hasáb; ennek a palástját alkotó három paralelogramma pontjai adják a halmazokat.

**258.** Pl. az  $A \setminus B$ ,  $A \cap B$ ,  $B \setminus A$  tartományokba kerüljenek rendre a  $3k$ ,  $3k + 1$  és  $3k + 2$  alakú számok ( $k \in \mathbf{N}$ ). Ekkor  $A = \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{N}\}$ ;  $B = \{3k \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{N}\}$ ;  $C = \{3k \mid k \in \mathbf{N}\} \cup \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{N}\}$ .

**259.** Megfelelő pl. a 257. feladat második és harmadik típusú megoldása.

**260.** a) Pl.  $H_1 = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ ,  $H_2 = \mathbf{N} \setminus \{1\}$ ,  $H_3 = \mathbf{N} \setminus \{2\}$ ,  $H_4 = \mathbf{N} \setminus \{3\}$ , ... ,

$H_n = \mathbf{N} \setminus \{n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , ...

b) Pl. megfelelő az alábbi konstrukció:

$H_1$	1	2	4	7	11	...
$H_2$		3	5	8	12	...
$H_3$			6	9	13	...
$H_4$				10	14	...
$H_5$					15	...
...						

( $H_n$  első eleme  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , s az első elemtől kezdve minden  $n$ -edik,  $(n+1)$ -edik,  $(n+2)$ -edik, ... természetes szám tartozik a halmazba.)

### Végtelen halmazok számossága

**261.** Az állítások igazak. A megszámlálhatóan végtelen halmazok elemeit sorozatba rendezhetjük, s ezt véges sok elem hozzávétele esetén is megtehetjük. (Például úgy, hogy a véges sok elemet a már meglévő sorozat elejére illesztjük.)

**262.** Igaz állítások: b), e), f), g), i), j).

a) Hamis.

b) Igaz.

c) Hamis; ellenpélda pl. a racionális számok halmaza. (Ugyanis bármely két racionális szám között található további racionális szám.)

d) Hamis; ellenpélda pl. a  $]0; 1[$ -ban lévő racionális számok halmaza.

e) Igaz. (A részhalmaz elemei részsorozatot alkotnak.)

f) Igaz.

g) Igaz.

h) Hamis. (Pl.  $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$ .)

i) Igaz.

j) Igaz. (Ha az  $A$ , illetve  $B$  halmaz elemeit  $a_1, a_2, \dots$ , illetve  $b_1, b_2, \dots$  sorba rendezzük, akkor tekintsük az  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  sorozatot! Ebben  $A \cup B$  minden elemét felsoroltuk,  $A \cap B$  elemeit kétszer is. Ha kihagyjuk a többször szereplő elemek egyikét, megfelelő részsorozatot kapunk.)

- 263.** a) Igaz, mert  $A = B$ .  
 b) Hamis; pl.  $A = \mathbf{N}^+$ ,  $B = \mathbf{N}$ , s ekkor  $|A| = |B|$ .  
 c) Igaz.  
 d) Igaz.  
 e) Hamis; pl.  $A = \mathbf{N}$ ,  $B = \mathbf{N}^+$ , s a leképezés  $a \in A, a \leftrightarrow a + 3$  ( $a + 3 \in B$ ).  
 f) Hamis.  
 g) Igaz.  
 h) Hamis; ellenpélda pl. a racionális számok halmaza.

Az állítás megfordítása igaz: d), f).

(A h) esetben véges számhalmaz elemei mindig sorba rendezhetők.)

- 264.** a) Minden lakót átköltöztet a szobájánál 1-gyel nagyobb számú szobába, s az új vendéget a megüresedett 1-esben el tudja helyezni.  
 b) Minden lakót átköltöztet a szobájánál 100-zal nagyobb számú szobába.  
 c) Pl. minden lakót átköltöztet a szobája számánál kétszer nagyobb számú szobába.

- 265.** a) Az egyes átlókban rendre 1, 2, 3, ... szám található, az első  $n$  átlóban összesen  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  darab.  $\frac{n(n+1)}{2} < 2004$ , ha  $n \leq 62$ .  $\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953$ ; így a 2004. szám a 63. átlóban az 51. helyen található. Mivel a páratlan sorszámú átlóban lévő elemeket „lentől felfelé” számoljuk össze, az átló kezdőszáma  $\frac{1}{63}$ , az 51. szám pedig az  $\frac{51}{13}$ .

- b) A 109. átló „alsó” kezdőtagja  $\frac{1}{109}$ , a táblázat 100. sorában az átló 10. eleme található:  $\frac{10}{100}$ .

- c) A 42. átló „felső” kezdőtagja  $\frac{42}{1}$ , az átló 26. eleme a  $\frac{17}{26}$ . Így  $\frac{17}{26}$  a pozitív racionális számok sorozatának  $\frac{41 \cdot 42}{2} + 26 = 887$ . tagja.

- d) Az 1, 2,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{3}{1}$ , ... sorozatból képezhetjük pl. a váltakozó előjelű 0, -1, 1, -2, 2,  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{2}{2}$ ,  $\frac{2}{2}$ , ... sorozatot.



**266.** Tegyük fel, hogy a  $]0; 1[$  számok halmaza megszámlálhatóan végtelen. Ekkor pl. tizedes tört alakjukban sorozatba rendezhetők:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}\dots x_{1n}\dots \\ a_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}\dots x_{2n}\dots \\ a_3 &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}\dots x_{3n}\dots \\ &\dots \\ a_n &= 0, x_{n1}x_{n2}x_{n3}\dots x_{nm}\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Tekintsük most az  $a = 0, y_1y_2y_3\dots y_n\dots$  számot, ahol  $y_i = 1$ , ha  $x_{ii} \neq 1$ , és pl.  $y_i = 2$ , ha  $x_{ii} = 1$ ! Mivel ennek  $i$ . számjegye különbözik  $a_i$ . számjegyétől, sikerült olyan számot konstruálni, amely – feltevésünkkel ellentétben – nincs a felsorolt számok között. Az ellentmondásból következik, hogy a  $]0; 1[$  számok – és így a valós számok – halmaza nem megszámlálható.

**267.** A halmazok elemei között kölcsönösen egyértelmű leképezést kell létesítenünk, vagy megmutathatjuk, hogy a két halmaz számossága megegyezik a természetes számok halmazának számosságával. Pl.:

a)  $a \in A \leftrightarrow a - 1 \in B$ .

b) A  $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$   $B$ -beli elemekhez rendeljük hozzá sorban a  $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$   $A$ -beli elemeket. (Képlettel: ha  $n$  páros természetes szám,  $n \leftrightarrow -\frac{n}{2}$ ; ha  $n$  páratlan természetes szám,  $n \leftrightarrow \frac{n+1}{2}$ .)

c)  $a \in A \leftrightarrow a + 10 \in B$ .

d)  $a \in A \leftrightarrow (a - 1)^2 \in B$ .

e)  $a \in A \leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{a}{2} - 4\right) \in B$ .

f) A  $p_1, p_2, p_3, \dots$  prímszámok halmazának és a  $0^3, 1^3, 2^3, \dots$  köbszámok halmazának számossága is megegyezik a természetes számok számosságával. ( $p_i \leftrightarrow (i-1)^3 \leftrightarrow i-1 \leftrightarrow i, i \in \mathbb{N}^+$ .)

g)  $A$  és  $B$  számossága is megegyezik  $\mathbb{N}$  számosságával.

**268.** Az a)–j) esetben az  $A$  és  $B$  halmazok számossága egyenlő, tehát létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés elemeik között; a k) esetben nem.

a)  $B \subseteq \mathbb{Q}$ , így megszámlálható.

b) Pl.  $a \in A \leftrightarrow \frac{1}{a} \in B$ .

c) A  $B$  halmaz  $(x; y)$  egész számokból álló számpárokat tartalmaz. Általában is igaz, hogy az egész számokból álló számpárok, számhármak stb. halmaza megszámlálhatóan végtelen. Feleltessük meg pl. az  $(x; y)$  elemnek az  $\frac{x}{y}$  racionális számot! Ekkor az  $(x; 0)$  és – ha nem engedjük meg – a  $(0; y)$  típusú párok maradtak ki a megfeleltetésből; s mivel ezek megszámlálhatóan sokan vannak, egyesítsük is megszámlálhatóan végtelen.



## Vegyes feladatok

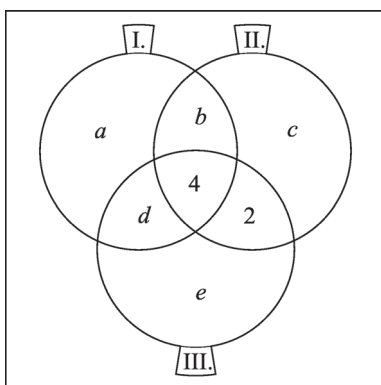
II

**270.** Több megoldás lehetséges. Pl.:

- a) az 542 számjegyeinek összege nem 12;
- b) 133 nem osztható 3-mal;
- c) 111 nem négyzetszám;
- d) 407 maradéka 3-mal osztva 2; vagy 133 osztható 7-tel;
- e) a Toldi Arany János költeménye, a többi Petőfié.

*Megjegyzés:*

Ezeket a „kakukktojás-típusú” feladatokat gyakran és szívesen tűzik ki a különböző vetélkedőkön. Sajnos, a feladatoknak általában több megoldása van. (Nemcsak az a megoldás lehet jó, amire a játékvezető gondol.) Néhány – elkedvetlenítő – példa:

**272/I.**

Az a) esetben kakukktojás lehet

- a 192, mert kisebb, mint 200; vagy
- az 543, mert nagyobb, mint 542; vagy
- a 471, mert 460 és 473 közé esik.

A b) esetben kakukktojás lehet

- a 133, mert számjegyei egyike sem összetett; vagy
- a 870, mert 10-zel osztható és így tovább.

**271.** Nem zárt műveletet kapunk a  $d, h, i, k$  esetekben.

**272.** Tegyük fel, hogy a kérdésekre csak igen vagy nem válaszokat adtak az akadémikusok. Jelöljük I, II, illetve III-mal az 1., 2., illetve 3. kérdésre igennel válaszoló akadémikusok halmazát, ekkor a 272/I. Venn-diagramot kapjuk.

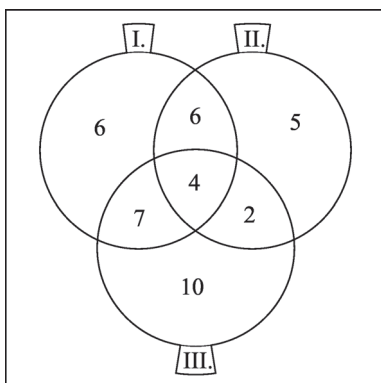
(Az egyes tartományok elemszámát rendre  $a, b, c, d, e$ -vel jelöltük.)

A feltételek szerint

- (1)  $a + b + d + 4 = 23$ ,
- (2)  $b + c + 4 + 2 = 17$ ,
- (3)  $4 + 2 + d + e = 23$ ,
- (4)  $a + d = 13$ ,
- (5)  $a + b = 12$ .

Az (1) és (4) egyenletekből  $b = 6$ ; az (1) és (5) egyenletekből  $d = 7$ ; továbbá  $a = 6$ ,  $c = 5$ ,  $e = 10$ . Az egyes tartományok elemszámait a 272/II. ábrán láthatók.

Összeadva a legalább egy igennel szavazók számát, 40-et kapunk, így 5 akadémikus szavazott mindegyik kérdésre nemmel.

**272/II.**

- 273.** a) A  $H_1, H_2, \dots, H_{39}$  halmazokban összesen  $1+2+\dots+39 = \frac{39 \cdot 40}{2} = 780$  elem van, így  $H_{40} = \{781, 782, \dots, 820\}$ .  
 b) Az elemek összege  $\frac{(781 + 820) \cdot 40}{2} = 32\,020$ .

- 274.** a)  $F \cup G$ ; b)  $F \setminus G$ ; c)  $F \cap G$ ; d)  $F \cup G \cup H$ ; e)  $(F \cup G) \setminus H$ ; f)  $F \setminus (G \cup H)$ ; g)  $F \cap G \cap H$ ; h) igaz.

**275.** Az állítás következik abból, hogy egy  $k$  elemű részhalmaz kiválasztásakor meghatároztunk egy  $(n - k)$  elemű részhalmazt is (ti. azt, amelyiket a ki nem választott elemek alkotnak), s ezért a  $k$  és  $(n - k)$  elemű részhalmazok párba állíthatók.

**276.** A  $H$  részhalmaz megadásakor minden egyes elemről eldönthetjük, hogy vagy hozzávesszük a részhalmazhoz, vagy nem. Ez  $2^n$  lehetőség, ennyi részhalmaza van egy  $n$  elemű halmaznak. (Az üres halmaz részhalmaza önmagának.)

**277.** Az állítás nem igaz  $n = 0$ -ra, de minden  $n \geq 1$  természetes számra már teljesül. Indukciós gondolatmenettel bizonyíthatunk:

Ha az állítás igaz egy  $k \in \mathbb{N}^+$  elemű  $H$  halmazra (vagyis ugyanannyi páros és páratlan elemszámú részhalmaza van  $H$ -nak), akkor egy  $(k + 1)$ . elem hozzávételével az eddigi páros elemszámú részhalmazokból páratlan elemszámú új részhalmazok keletkeznek és fordítva. Vagyis  $H$  már meglévő és újonnan keletkezett részhalmazaira is igaz lesz, hogy ugyanannyi közülük a páros, mint a páratlan elemszámú. (Az állítás  $n = 1$  esetén igaz.)

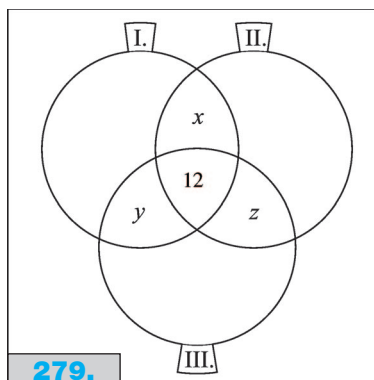
**278.** Szemléltessük egy táblázattal az egyes tulajdonságokat!

Magasság	80%		20%
Barna haj	15%	85%	
		65%	
Testsúly	10%		
Bajusz		5%	
		50%	

Látható, hogy az első két tulajdonsággal a férfiak legalább 65%-a rendelkezik. Ha a 10%-nyi, 75 kg-nál nem nehezebb férfi ebből a 65%-ból kerül ki; s a maradék 55%-ból kimarad az 5% bajszos, akkor a négy tulajdonság a férfiak legalább 50%-ára igaz.

**279.** Jelöljük az osztály létszámát  $n$ -nel! Az egyes kiránduláson részt vevő tanulókat szemléltessük egy-egy halmazzal; mivel minden tanuló részt vett legalább két kiránduláson, csak a halmazok közös részeinek elemszámát kell meghatározni.

Az ábra alapján pl.  $x$  jelöli azoknak a tanu-





lóknak a számát, akik részt vettek az első és a második kiránduláson, de a harmadikon nem.

Több megoldási gondolatmenetet is adhatunk.

*Első gondolatmenet:*

A Venn-diagram alapján felírható egyenletrendszer:

$$x + y + 12 = 0,7n,$$

$$x + z + 12 = 0,8n,$$

$$y + z + 12 = 0,9n.$$

Adjuk össze az egyenleteket:  $2(x + y + z + 12) + 12 = 2,4n$ . A diagram alapján az összes tanuló száma  $n = x + y + z + 12$ , innen  $12 = 0,4n$ ,  $n = 30$ .

Ha az osztálylétszám 30, akkor az első kirándulásra 21, a másodikra 24, a harmadikra 27 gyerek ment el, az „össz kirándulásszám” 72; valóban 12 gyerek ment el mind a három kirándulásra.

*Második gondolatmenet:*

Visszafelé okoskodunk: ha az első kirándulásra elment a tanulók 70%-a, akkor nem ment el 30%-uk, így  $z = 0,3n$ . Hasonlóan  $y = 0,2n$  és  $x = 0,1n$ . Felhasználva az  $n = x + y + z + 12$  összefüggést, az előző eredményt kapjuk.

*Harmadik gondolatmenet:*

A szita formula alapján a kirándulások összlétszáma  $0,7n + 0,8n + 0,9n$ , s ez egyenlő  $2n + 12$ -vel, hiszen minden gyerek kétszer, 12 pedig háromszor kirándult. A  $0,7n + 0,8n + 0,9n = 2n + 12$  egyenlet megoldása  $n = 30$ .

*Negyedik gondolatmenet:*

Mivel minden kiránduláson csak egész számú tanuló vehetett részt,  $0,7n$ ,  $0,8n$  és  $0,9n$  egész számok. Ez csak akkor lehetséges, ha  $n$  10-nek többszöröse. Az  $n = 10$  és  $20$  nem, de  $n = 30$  megoldást ad; bizonyítanunk kell még, hogy  $n$  növelésével nem kapunk újabb megoldást.

**280.** Jelöljük  $A$ -val és  $B$ -vel azon ötjegyű pozitív egész számok halmazát, amelyekben nincs 8-as, illetve 9-es számjegy! A feladat  $\overline{A \cup B}$  elemszámának meghatározása. ( $A$   $H$  alaphalmaz az ötjegyű pozitív egész számok halmaza.)  $|A| = |B| = 8 \cdot 9^4$ ,  $|A \cap B| = 7 \cdot 8^4$ ,  $|H| = 9 \cdot 10^4$ . Innen  $|\overline{A \cup B}| = |H| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 9 \cdot 10^4 - 2 \cdot 8 \cdot 9^4 + 7 \cdot 8^4 = 13\,696$ . (Az összes ötjegyű pozitív egész számból kivontuk azokat, amelyek nem tartalmazznak 8-as, illetve 9-es számjegyet; de így a sem 8-ast, sem 9-est nem tartalmazó számokat kétszer vontuk le, tehát egyszer vissza kell adni az összeghez.)

**281.**  $3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3 = 55\,980$ . (Az összes számból először levonjuk azokat, amelyek legfeljebb kétféle számjegyet tartalmaznak; ekkor azonban a csupa egyforma számjegyből álló három számot kétszer vontuk le, egyszer hozzá kell őket adni az összeghez.)

**282.** Három kör a síkot legfeljebb 8 részre osztja. Ha a negyedik felvett kör a korábbiakat két-két pontban metszi, akkor 6 új síktartomány keletkezik, így négy kör a síkot legfeljebb 14 részre osztja. Négy halmaz esetén viszont  $2^4 = 16$  halmaztartományt kellene kapnunk, tehát négy kör segítségével nem készíthető Venn-diagram.

**283.** Igen. Az első három halmaz lehet kör, majd ezután mindig úgy kell felvennünk a soron következő  $n$ . halmazt, hogy minden korábbi halmaztartományt kettéoszsszunk. Ezt megtehetjük, ha pl. az utoljára felvett  $(n - 1)$ . halmaz „kerületére” illesztjük az  $n$ -et.

**284.** A feltételekből következik, hogy  $Z_f \subseteq D_f$  és  $Z_g \subseteq D_g$ .

a)  $(Z_f \cup Z_g) \cap (D_f \cap D_g)$ ; b)  $(Z_f \setminus Z_g) \cap (D_f \cap D_g)$ .

**285.** a)  $H_{39}$ -ig  $1 + 2 + 3 + \dots + 39 = \frac{39 \cdot 40}{2} = 780$  darab szám szerepel.

$H_{40}$  kezdő eleme a 781. páratlan szám;  $781 \cdot 2 - 1 = 1561$ , így

$H_{40} = \{1561, 1563, \dots, 1639\}$ . b)  $\frac{(1561 + 1639) \cdot 40}{2} = 64\,000$ .

**286.** a) A feladatgyűjtemény 286-os ábrája szerinti első  $n$  „átlóban”  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  rácspont van.  $\frac{n(n+1)}{2} < 1000$ , innen  $-45,2 < n < 44,2$ , vagyis az 1000. racionális számnak megfelelő rácspont a 45. átlóban található.  $\frac{44 \cdot 45}{2} = 990$ , az átló 10. pontját keressük. A 45. átló rácspontjai sorra  $(45; 1), (44; 2), (43; 3), \dots$ ; a 10. rácspont  $(36; 10)$ . Ebben a sorban tehát az 1000. racionális szám a  $\frac{36}{10}$ .

b)  $\frac{76 \cdot 77}{2} + 21 = 2947$ .

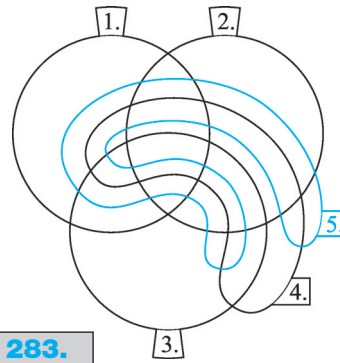
*Megjegyzés:*

Az eljárás hasonló a 265. feladatban alkalmazotthoz.

**287.** Válasszunk ki egy-egy különböző színű tárgyat! Ha ezek különböző alakúak, készen vagyunk; ha egyforma alakúak, akkor válasszunk egy tőlük különböző alakú tárgyat! Ekkor a három tárgy között lesz színre és alakra eltérő.

*Megjegyzés:*

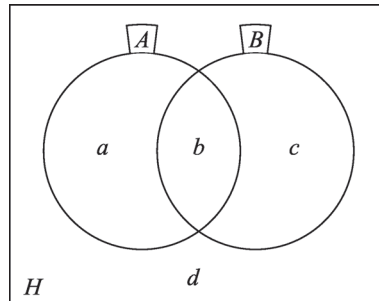
Jelöljük  $A$ -val az ugyanolyan színű tárgyak halmazát (valamelyik színből); ugyanígy  $B$ -vel az azonos alakú tárgyak halmazát (valamelyik alakból), s az így felvehető Venn-diagram tartományait jelöljük  $a, b, c, d$ -vel! A feladat egy lehetséges átfogalmazása: ha  $A$  és  $\bar{A}$ , valamint  $B$  és  $\bar{B}$  nemüres halmazok, akkor az  $a$  és  $c$ , valamint  $b$  és  $d$  részhalmazok sem üresek. A bizonyítás pedig úgy történt, hogy vettünk egy  $A$  és  $A$ -beli  $x$  és  $y$  elemet; ha az  $a$  és  $c$ , illetve  $b$  és  $d$  részhal-



**283.**



**287.**





mazokból kerültek ki, készen vagyunk; ha pedig az  $a$  és  $d$ , illetve  $b$  és  $c$  részhalmazokból, akkor vettünk hozzájuk rendre egy  $z$  elemet  $b$  vagy  $c$ -ből, illetve  $a$  vagy  $d$ -ből.

**288.** A kortársak ott tévedtek, hogy ha a „Minden krétai hazudik.” állítás hamis, akkor tagadása „Van olyan krétai, aki igazat mond.”. Ez pedig nem jelenti azt, hogy *minden* krétai igazat mond, lehetnek közöttük hazugok is. (Hamis maga Epimenidész állítása is.)

**289.** Ez az ismert logikai paradoxon *Bertrand Russel* (1872–1970) angol matematikustól származik. Vizsgáljuk meg, hogy ki borotválja a borbélyt!

Ha maga borotválkozik, akkor – állítása szerint – nem borotválja önmagát; ha nem maga borotválkozik, akkor pedig – állítása szerint – saját magát borotválja. Ellentmondást kaptunk: a borbély borotválja is magát meg nem is borotválja.

**290.** A paradoxont 1903-ban találta *Bertrand Russel*. Az ellentmondást úgy oldhatjuk fel, ha feltesszük, hogy nem létezik az összes halmaz halmaza (s nem létezik az összes olyan halmaz halmaza sem, amelyek nem elemei önmaguknak).

**291.** a)  $8 + |B \setminus A|$ , vagyis legalább 8; b)  $5 - |B \setminus A|$ , vagyis legfeljebb 5; c) legfeljebb 5.

**292.** A két szélsőérték  $|A \cup B|$  esetén 37, illetve 6;  $|A \cap B|$  esetén 6, illetve 0.

**293.** a)  $A$ -nak 0 elemű részhalmaza van  $\binom{10}{0} = 1$  darab; 1 elemű részhalmaza

$$\binom{10}{1} = 10; 2 \text{ elemű részhalmaza } \binom{10}{2} = 45; \dots; 10 \text{ elemű részhalmaza}$$

$$\binom{10}{10} = 1. \text{ A feladat a } 0 \cdot \binom{10}{0} + 1 \cdot \binom{10}{1} + 2 \cdot \binom{10}{2} + \dots + 10 \cdot \binom{10}{10} \text{ összeg}$$

meghatározása.

Minden elemet a többi 9 elemből alkotható összes részhalmazban egyszer számoltunk, vagyis minden elem  $2^9$ -szer szerepel az összegben. A részhalmazok elemszámainak összege  $10 \cdot 2^9 = 5120$ .

b) Minden elem  $2^9$ -szer szerepel az összegben, így a keresett összeg értéke  $(1 + 2 + \dots + 10) \cdot 2^9 = 28\,160$ .

*Megjegyzés:*

Ha  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , hasonlóan mutathatjuk meg, hogy az a) esetben  $n \cdot 2^{n-1}$ ,

a b) esetben  $\frac{n(n+1)}{2} \cdot 2^{n-1}$  a válasz, s „mellékesen” megkaptuk a  $0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} +$

$+ 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$  azonosságot is.

**294.** a) A 4 és 5 elemek két halmazba kerülhetnek ( $A \setminus B$ -be vagy  $B \setminus A$ -ba), ezért 4 megadási lehetőség van.

b) 8.

c) Az elemek három halmazba kerülhetnek ( $A \setminus B$ -be,  $B \setminus A$ -ba vagy  $A \cap B$ -be). Ha  $A = B$ -t nem engedjük meg, akkor a  $3^5 = 243$  lehetőségből le kell vonni azt, amikor az  $A$  és  $B$  megegyezik, tehát 242 megadási lehetőség van.

**295.** Az  $A, B, C$  halmazok hét halmaztartományt határoznak meg (az ábrán  $a, b, c, d, e, f, g$ ).

Mivel  $g = \emptyset$ , a 18 elem bármely 6 tartományba kerülhet, ez  $6^{18}$  lehetőség. Azonban nem számolhatjuk azokat az eseteket, amikor  $A = B$  (vagyis  $a = b = e = f = \emptyset$ ),  $B = C$ ,  $A = C$ . Ilyen van  $3 \cdot 2^{18}$  darab, így összesen  $6^{18} - 3 \cdot 2^{18}$  különböző  $A, B, C$  halmazhármass van. ( $A = B = C$  nem lehetséges, mert  $A \cap B \cap C = \emptyset$ .)

Ha  $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ , akkor az előző gondolatmenettel kapható  $7^{18} - 3 \cdot 3^{18}$  darabszámhoz hozzá kell adni 2-t, mert az  $A = B = C$  esetet háromszor vontuk le, pedig csak egyszer kell.

**296.** a)  $2^9$ ; b)  $2^8$ ; c)  $3 \cdot 2^8$  (vagy  $2^{10} - 2^8$ ); d)  $3 \cdot 2^8$  (vagy  $2^{10} - 2^8$ ); e)  $2^8$ ; f)  $2^8$ ; g)  $2^4$  (beleszámoltuk az  $\{5\}$  részhalmazt is); h)  $2^{10} - 2^5 - 1$ ; i)  $2^{10} - 2^7 - 1$ .

**297.** A  $H = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_9\}$  halmaz  $A_1, A_2, A_3, A_4$  részhalmazait pl. az alábbi táblázattal adhatjuk meg:

$H$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_9$
$A_1$	1	1	0		0
$A_2$	1	0	0		0
$A_3$	0	1	0		1
$A_4$	0	1	0		0

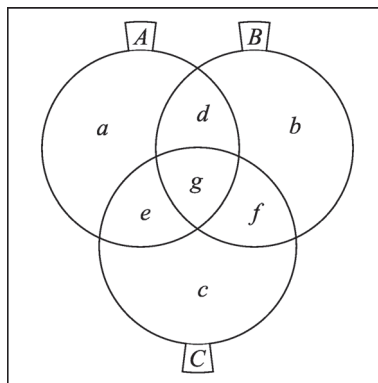
Az első sorban a  $H$  halmaz elemeit tüntettük fel; a következő sorokban az egyes részhalmazoknál 1-est írunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs. Pl.  $a_1 \in A_1$ , de  $a_1 \notin A_3$ .

A feladat feltétele alapján a táblázatban 28 darab 1-es szerepel, s meg kell mutatnunk, hogy van olyan oszlop, amelyben 4 darab 1-es van. Ez pedig nyilvánvaló: ha minden oszlopban csak 3 darab 1-es lenne, összesen  $9 \cdot 3 = 27$  darab 1-es lenne a táblázatban.

**298.** Legyen  $|M| = n$ . Az  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2000$ ) halmazok elemszámát összeadva legalább  $\frac{4000n}{3}$ -at kapunk (egy-egy elemet több részhalmazban is számoltunk). Ha minden elem csak legfeljebb 1333 részhalmazban fordulna elő,  $1333n < \frac{4000n}{3}$  lenne.

**299.**  $2^{n-1}$  részhalmazt kiválaszthatunk, ha pl. mindegyikben szerepel egy rögzített elem, ennél többet viszont nem lehet kiválasztani. Ha ugyanis szerepel egy  $R$  részhalmaz a kiválasztásban, akkor a  $H \setminus R$  komplementer részhalmaz

**295.**





már nem szerepelhet, hiszen nem lenne  $R$ -rel közös eleme. Vagyis legfeljebb az összes részhalmaz fele választható ki.

**300.** Legfeljebb 8-at.

A 2, 3 és 5 kitevői paritásuk alapján kétféleképpen lehetnek: párosak vagy páratlanok. Ez azt jelenti, hogy minden, a 2, 3 és 5 prímosztókkal rendelkező szám a kitevők paritása alapján 8-féleképpen lehet. Vagyis 9 kiválasztott szám esetén már lesz közöttük két olyan, melyekben a 2, 3 és 5 kitevőjének a paritása rendre ugyanaz, s ezen számok szorzata négyzetszám.

**301.** Minden tíztagú összeg 55 és 955 között van, s 1023 nem üres részhalmaz létezik. A skatulyaelv miatt van két olyan nem üres részhalmaz, amikben az elemek összege megegyezik; s ha a két részhalmaznak vannak közös elemei, ezeket mindkettőből elhagyhatjuk.

**302.** Jelöljük az elemeket  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ -zal, s tekintsük az alábbi 100 számot:

$a_1$ ;

$a_1 + a_2$ ;

$a_1 + a_2 + a_3$ ;

...

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$ .

Ha valamelyik összeg 100-zal osztható, készen vagyunk; ha pedig egyik sem osztható 100-zal, akkor a skatulyaelv miatt van közöttük két olyan, amelyik 100-zal osztva azonos maradékot ad. Ha ezek pl. az  $S_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i$  és  $S_j = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_j$  összegek ( $i < j$ ), akkor az  $S_j - S_i$  különbség megfelel. Hasonlóan mutathatjuk meg, hogy  $n$  egész szám közül mindig kiválasztható néhány (esetleg egy) úgy, hogy összegük  $n$ -nel osztható legyen.

**303.** Ha a tagok között van olyan, aki legalább 7 ülésen volt jelen, akkor az ezeken rajta kívül résztvevő  $7 \cdot 9 = 63$  tag mind különböző, tehát legalább 64 tagból áll a bizottság.

Az ülések összlétszáma 400. Ha mindenki legfeljebb 6 ülésen vett részt, akkor pedig legalább 67 tagja volt a bizottságnak:  $\frac{400}{6} > 66$ .

**304.** Jó megoldás pl. az  $A = \{1; 5; 9; 13; \dots\}$ ,  $B = \{3; 7; 11; 15; \dots\}$ ,  $C = \{2; 4; 6; 8; \dots\}$  három halmaz. Ha a kivett számok összege páros,  $C$ -ből lettek kiválasztva; ha összegük  $4k + 1$  alakú,  $B$ -ből, ha  $4k + 3$  alakú,  $A$ -ból ( $k \in \mathbb{N}$ ).